QUESTIONS DE MODÉLISATION :
L'INVESTISSEMENT PAR DESTINATION, L'ÉPARGNE
ET LA DETTE PUBLIQUE
DANS UN MÉGC DYNAMIQUE SÉQUENTIEL
Une revue des écrits *

par
ANDRÉ LEMELIN
et BERNARD DECALUWÉ

Université du Québec, INRS-Urbanisation, Culture et Société
CIRPÉE, Université Laval

Novembre 2007

* An English version is available on the PEP website (http://www.pep-net.org/NEW-PEP/index.html) : in the unfolding menu under « MPIA », go to « Recommended readings », section on « Growth and Poverty ».

QUESTIONS DE MODÉLISATION : L'INVESTISSEMENT PAR DESTINATION, L'ÉPARGNE ET LA DETTE PUBLIQUE DANS UN MÉGC DYNAMIQUE SÉQUENTIEL

Une revue des écrits *

par

ANDRÉ LEMELIN

et **BERNARD DECALUWÉ**

Université du Québec, INRS-Urbanisation, Culture et Société

CIRPÉE, Université Laval

Novembre 2007

* An English version is available on the PEP website (http://www.pep-net.org/NEW-PEP/index.html) : in the unfolding menu under « MPIA », go to « Recommended readings », section on « Growth and Poverty ».

PLAN

PREMIÈRE PARTIE :
L’INVESTISSEMENT PAR DESTINATION

Introduction

Dans un modèle dynamique séquentiel, l'équilibre statique de chaque période détermine le montant de l'épargne et, partant, le montant global des dépenses d'investissement. Reste à savoir comment les dépenses d'investissement se répartissent entre les industries de destination. Car le stock de capital disponible à chaque période *t* dans chaque industrie *i* est déterminé par la contrainte intertemporelle

$$K_{i,t+1} = I_{i,t} + (1-\delta_i)K_{i,t} \qquad [001]$$

Dans cette première partie du document, nous nous penchons très exactement sur la variable $I_{i,t}$ de l'équation qui précède. Cette partie du rapport comprend trois chapitres, en plus de l'introduction et du résumé-conclusion.

Le premier chapitre rappelle la théorie microéconomique de la demande d'investissement de la firme, telle que formulée par Nickell (1978), et la transpose en temps discret en vue de son application à un modèle dynamique séquentiel. Le second chapitre passe en revue plusieurs modèles appliqués de la demande d'investissement qui sont implantés dans des MÉGC. Cette revue s'attache aussi à évaluer les modèles à la lumière de la théorie et à décrire comment sont équilibrées, dans les MÉGC, la somme des demandes d'investissement et l'épargne totale. Le troisième chapitre examine une autre famille de modèles, celle des modèles de répartition de l'investissement entre les secteurs de destination, dont certains s'apparentent à des modèles d'offre de capital. Le quatrième chapitre propose une synthèse de la théorie et des modèles recensés.

1. Théorie de la Demande d'investissement

Rares sont les modèles d'équilibre général calculable (MÉGC) dont le mécanisme de répartition des investissements par destination repose sur un fondement théorique explicite. Bourguignon *et al.* (1989) font exception. Ils renvoient au modèle théorique de Nickell (1978) dans les termes suivants : « Such a functional form is consistent with formulations of investment demand in which there are costs of adjustment and investment decisions are irreversible ». Aussi semble-t-il opportun, autant pour comprendre les fondements théoriques de la formulation de Bourguignon *et al.* (1989) que pour établir un cadre théorique général, de retourner aux sources et de rendre compte du modèle de Nickell (1978), et ce, d'autant plus que l'exposé de Nickell est très systématique et vaut la peine d'être approfondi.

Le modèle de Nickell est formulé en temps continu. Après avoir présenté le modèle de base en temps continu, nous en faisons une transposition en temps discret, pour que les résultats soient utilisables dans le contexte d'un modèle dynamique séquentiel. Nous développons ensuite une version du modèle avec coûts d'ajustement qui conduit, sous certaines hypothèses, à la formulation théorique avancée par Bourguignon *et al.* (1989).

1.1 LE MODÈLE THÉORIQUE DE NICKELL EN TEMPS CONTINU

Le modèle de base de Nickell repose sur les hypothèses suivantes.

1. Le marché du capital est parfait (ce qui implique notamment la possibilité d'emprunter ou de prêter sans limite).
2. L'avenir est connu avec certitude.
3. La firme produit un seul bien en combinant du travail et du capital selon une fonction de production doublement différentiable, avec des rendements à l'échelle strictement décroissants partout.
4. Le capital n'est pas différencié en fonction de sa date de production (pas d'effet « vintage »).
5. L'entreprise est soumise aux prix du marché sur tous les marchés (*price taker*); en particulier, elle peut vendre et acheter du capital en tout temps sans restriction et celui-ci devient instantanément productif à l'achat.
6. Il n'y a aucun coût à la vente, à l'achat ou à la mise en place du nouveau capital.
7. Il n'y a pas de taxes; en particulier, il n'y a pas de taxes sur le capital, ni de subventions à l'investissement.

Le flux de trésorerie instantané de la firme est donné par l'excédent des recettes brutes de la vente du produit sur les salaires et les dépenses d'investissement :

$$p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t \qquad [002]$$

où

L_t est le volume du facteur travail utilisé au moment t

K_t est stock de capital en place au moment t

I_t est l'investissement en volume au moment t

p_t est le prix du produit au moment t

w_t est le taux de salaire au moment t

q_t est le prix de remplacement du capital, c'est-à-dire le prix du bien d'investissement, au moment t

$F(K_t,L_t)$ est la fonction de production

La contrainte dynamique qui lie le capital à l'investissement est donnée par

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t \quad [003]$$

où la variable surmontée d'un point est la dérivée par rapport au temps et où δ est le taux de dépréciation instantané.

La firme maximise la valeur présente de son flux de trésorerie. Si l'on suppose constant le taux d'actualisation r, le problème de maximisation est donc :

$$MAX\ V = \int_0^\infty e^{-rt}\left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t\right] dt \quad [004]$$

$$\text{s.c. } \dot{K}_t = I_t - \delta K_t \quad [003]$$

$$\text{et } K_0 = \overline{K}_0 \quad [005]$$

La solution conduit aux conditions de premier ordre

$$p_t \frac{\partial F}{\partial L_t} = w_t \quad [006]$$

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = q_t\left[r + \delta - \frac{\dot{q}_t}{q_t}\right] \quad [007]$$

$$I_t = \dot{K}_t + \delta K_t \quad [003]$$

$$K_0 = \overline{K}_0 \quad [005]$$

Le membre de droite de [007] est le coût d'usage du capital.

Si l’on définit le taux d’inflation instantané

$$\pi_t = \frac{\dot{q}_t}{q_t} \quad [008]$$

on obtient l’expression usuelle du coût d’usage du capital, dénoté u_t :

$$u_t = q_t\,(r + \delta - \pi_t) \quad [009]$$

Comme le signale Nickell (1978, p. 11), le problème dynamique de la firme se réduit à une solution essentiellement statique : les conditions de l'optimum à chaque instant dépendent uniquement des valeurs contemporaines des variables et de leur taux de changement. On peut d'ailleurs définir un problème de maximisation instantané dont la solution est équivalente à celle du problème de maximisation [004] sous contrainte de [003] et [005] :

$$MAX \left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - u_t K_t\right] \qquad [010]$$

$$\text{s.c. } K_t = \overline{K}_0 + \int_0^t \dot{K}_\tau \, d\tau = \overline{K}_0 + \int_0^t (I_\tau - \delta K_\tau) \, d\tau \qquad [011]$$

Les conditions premières de l'optimum sont données par

$$p_t \frac{\partial F}{\partial L_t} = w_t \qquad [006]$$

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = u_t \qquad [012]$$

$$I_t = \dot{K}_t + \delta K_t \qquad [003]$$

$$K_0 = \overline{K}_0 \qquad [005]$$

Il est facile de vérifier, étant donné [008] et [009], que les conditions [006], [012], [003] et [005] sont strictement équivalentes à [006], [007], [003] et [005] .

1.1 Le modèle de base de Nickell en temps discret

1.1.1 Conditions premières de l'optimum

Le flux de trésorerie de la période *t* est donné par l'excédent des recettes brutes de la vente du produit sur les salaires et les dépenses d'investissement :

$$p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t \qquad [002]$$

où

L_t est le volume du facteur travail utilisé à la période *t*

K_t est stock de capital en place pour la période *t*

I_t est l'investissement en volume à la période *t*

p_t est le prix du produit à la période *t*

w_t est le taux de salaire à la période *t*

q_t est le prix de remplacement du capital, c'est-à-dire le prix du bien d'investissement, à la période *t*

F(K_t,L_t) est la fonction de production

La contrainte intertemporelle qui lie le capital à l'investissement est donnée par

$$\Delta_t K = K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t \qquad [013]$$

c'est-à-dire

$$I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t = K_{t+1} - (1-\delta) K_t \qquad [014]$$

où δ est le taux de dépréciation périodique.

Cette formulation suppose que le capital mis en place durant la période *t* ne peut être utilisé qu'à partir de la période suivante. La transposition en temps discret sous cette forme impose donc d'emblée un délai de mise en place du capital. En temps continu, comme nous l'avons rapporté précédemment (Nickell, 1978, p. 11), le problème dynamique de la firme se réduit à une solution essentiellement statique, où les conditions de l'optimum à chaque instant dépendent uniquement des valeurs contemporaines des variables. Avec la transposition en temps discret, au contraire, les conditions de l'optimum de chaque période dépendent des valeurs contemporaines *et passées* des variables. Et puisque les décisions passées contraignent le présent, de même, les décisions du présent contraindront l'avenir : la firme doit donc, à chaque période, tenir compte de l'avenir et prendre les décisions qui rendront possible le respect des conditions de l'optimum dans le futur[1] : la contrainte d'accumulation du capital est véritablement *intertemporelle*.

On remarque aussi dans [014] que la dépréciation est prélevée entre les périodes, de sorte que le capital disponible au début de la période le demeure tout au long de la période. Il faut donc reformuler l'hypothèse 5 de Nickell :

5. L'entreprise est soumise aux prix du marché sur tous les marchés (*price taker*); en particulier, l'entreprise peut acheter ou vendre n'importe quelle quantité de capital à la fin de chaque période *t* et ce capital devient productif ou cesse d'être disponible au début de la période suivante.

La firme maximise la valeur présente de son flux de trésorerie. Si l'on suppose constant le taux d'actualisation *r*, le problème de maximisation est :

$$MAX\ V = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t \right] \qquad [015]$$

---

1 À moins de supposer, comme dans MIRAGE (Bchir et al., 2002), que l'investissement est instantanément productif.

s.c. $I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t$ [014]

et $K_0 = \overline{K}_0$ [005]

La solution conduit aux conditions de premier ordre (voir les détails à l'annexe A2.1)

$$p_t \frac{\partial F}{\partial L_t} = w \quad [016]$$

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = (1+r)q_{t-1} - q_t(1-\delta) \quad [017]$$

$$I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t \quad [014]$$

$$K_0 = \overline{K}_0 \quad [005]$$

On peut aussi écrire [017] sour la forme

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = rq_{t-1} + \delta q_t - (q_t - q_{t-1}) \quad [018]$$

On remarque dans [017] et [018] la présence d'une variable retardée. Cela vient du délai de mise en place du nouveau capital qui est inhérent à la contrainte intertemporelle en temps discret [014].

1.1.2 Coût d'usage du capital en temps discret

Définissons le taux d'inflation rétrospectif[2]

$$\pi_t = \frac{(q_t - q_{t-1})}{q_{t-1}} \quad [019]$$

de sorte que

$$(q_t - q_{t-1}) = \frac{(q_t - q_{t-1})}{q_{t-1}} q_{t-1} = \pi_t q_{t-1} \quad [020]$$

et la condition [018] devient

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = rq_{t-1} + \delta q_t - \pi_t q_{t-1} = (r - \pi_t)q_{t-1} + \delta q_t \quad [021]$$

Le membre de droite de [021]

---

2 Ici, nous avons défini un taux rétrospectif, mais on pourrait tout aussi bien définir un taux prospectif sans rien changer à la substance des résultats.

$$u_t = (r - \pi_t) q_{t-1} + \delta q_t \qquad [022]$$

est le coût d'usage du capital, auquel, à l'optimum, la valeur du produit marginal du capital doit être égale. Mais ce coût d'usage prend une forme différente de sa forme usuelle en temps continu, $q_t(r + \delta - \pi_t)$.

Une première différence entre le membre de droite de [022] et le coût du capital en temps continu est que le taux d'inflation instantané est remplacé en temps discret par un taux d'inflation périodique. La seconde différence est la présence de la variable retardée q_{t-1} et surtout du produit $r\, q_{t-1}$: comme dans [017] et [018], cela vient du délai de mise en place du nouveau capital qui est inhérent à la contrainte intertemporelle en temps discret [014].

1.1.3 Le « q » de Tobin dans les conditions premières

N.B. : Dans les lignes qui suivent, la notation est proche de celle de Tobin (1969) et de Tobin et Brainard (1977), transposée en temps discret.

Tobin (1969) définit le « *q* » comme le rapport

$$q = \frac{\text{Valeur au marché de la firme}}{\text{Coût de remplacement du capital}}$$

La valeur au marché, ou valeur boursière, de la firme correspond à la valeur présente des flux de revenus futurs qu'attendent les actionnaires. Dans un univers simplifié, sans inflation, ni taxation, ni dépréciation du capital, une quantité ΔK de capital, dont le coût d'acquisition est égal à $p\,\Delta K$, produit une séquence de revenus anticipés $\{E(t)\}$.

L'efficacité marginale du capital ρ est définie implicitement[3]. La valeur de ρ est celle qui est solution de l'égalité

$$p\,\Delta K = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho} \right)^t E(t) \qquad [023]$$

Dans le cas particulier où $E(t)$ serait constant, égal à $\overline{E}$, on aurait

$$p\,\Delta K = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho} \right)^t E(t) = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho} \right)^t \overline{E} = \frac{1}{\rho}\overline{E} \qquad [024]$$

---

[3] Le symbole utilisé dans Tobin (1969) et Tobin et Brainard (1977) est *R*. Nous lui avons substitué ρ pour éviter la confusion avec le R_t que nous emploierons plus loin pour désigner la valeur du produit marginal du capital.

On peut donc définir l'efficacité marginale du capital ρ comme le taux qu'il faut appliquer au coût de l'investissement $p\,\Delta K$ pour qu'une rente perpétuelle au montant de $\overline{E} = \rho\, p\, \Delta K$ ait la même valeur présente que la séquence de revenus anticipés $\{E(t)\}$.

Par ailleurs, si MV est l'évaluation boursière de cet investissement, alors le taux de rendement r_K implicitement exigé par le marché des actions est donné par

$$MV = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r_K} \right)^t E(t) \qquad [025]$$

où l'on suppose que la séquence de revenus anticipés $\{E(t)\}$ est la même aux yeux du marché qu'à ceux du promoteur.

Dans le cas particulier où $E(t)$ serait constant, égal à $\overline{E}$, on aurait

$$MV = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r_K} \right)^t E(t) = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r_K} \right)^t \overline{E} = \frac{1}{r_K} \overline{E} \qquad [026]$$

Le taux de rendement r_K implicitement exigé par le marché est donc le taux qu'il faut appliquer à l'évaluation boursière de l'investissement MV pour qu'une rente perpétuelle au montant de $\overline{E} = r_K MV$ ait sur le marché la même valeur présente que la séquence de revenus anticipés $\{E(t)\}$.

Le « q » de Tobin est le rapport de la valeur boursière sur le coût de remplacement :

$$q = \frac{MV}{p\,\Delta K} \qquad [027]$$

Il est rentable d'investir quand la valeur du « q » est supérieure à 1. Plus rigoureusement, le volume d'investissement optimum est celui auquel l'augmentation marginale de la valeur au marché est égale à l'augmentation marginale du coût de l'investissement[4].

Dans le cas particulier où $E(t)$ serait constant, égal à $\overline{E}$, on aurait

---

[4] Le rapport de l'augmentation marginale de la valeur au marché sur l'augmentation marginale du coût de l'investissement correspond à ce qui est désigné dans la littérature comme le « *q* marginal » **dans le cas où le coût marginal de l'investissement est constant**. Lorsque les coûts d'ajustement croissent avec le volume de l'investissement, il est inexact de désigner ce rapport comme le « *q* marginal », puisqu'il est alors le rapport de deux dérivées, et non la dérivée d'un rapport (le *q*).

$$q = \frac{MV}{p\,\Delta K} = \frac{\left(\bar{E}/r_K\right)}{\left(\bar{E}/\rho\right)} = \frac{\left(1/r_K\right)}{\left(1/\rho\right)} = \frac{\rho}{r_K} \qquad [028]$$

Dans le cas général où $E(t)$ n'est pas constant, MV n'en demeure pas moins une fonction monotone décroissante du taux de rendement r_K exigé par le marché. Or, pour une valeur donnée de $p\,\Delta K$, étant donné la séquence de revenus anticipés $\{E(t)\}$, l'efficacité marginale du capital ρ est fixée. Il s'ensuit que la valeur de q est, tout comme MV, une fonction monotone décroissante de r_K et, par le fait même, une fonction monotone croissante du rapport $\frac{\rho}{r_K}$.

En outre, étant donné les relations [023] et [025], il est clair que le « q » de Tobin est égal à 1 lorsque $r_K = \rho$.

N.B. : Nous revenons maintenant à la notation du présent document.

Où peut on retrouver le « q » de Tobin dans le modèle développé précédemment ? On développe[5] :

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = (1+r)\,q_{t-1} - (1-\delta)\,q_t \qquad [017]$$

et on trouve (voir les détails à l'annexe A2.2)

$$q_t\,K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left[(1-\delta)\,q_{t+1}\,K_{t+1} + p_{t+1}\frac{\partial F}{\partial K_{t+1}}K_{t+1}\right] \qquad [029]$$

Or, la contrainte d'accumulation équivaut à

$$(1-\delta)K_t = K_{t+1} - I_t \qquad [030]$$

En substituant dans [029], on obtient

$$q_t\,K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left(p_{t+1}\frac{\partial F}{\partial K_{t+1}}K_{t+1} - q_{t+1}\,I_{t+1} + q_{t+1}\,K_{t+2}\right) \qquad [031]$$

où on peut remplacer le terme $q_{t+1}\,K_{t+2}$ par son expression selon cette même relation. Par substitutions successives, on arrive à

---

5 Le développement qui suit est parallèle à celui de Hayashi (1982) tel que reproduit dans Nabil Annabi, *Les MÉGC avec anticipations rationnelles : introduction*, présentation diapo, mars 2003; voir les diapositives No 38 et suivantes.

$$q_t\,K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^s}\left[p_{t+s}\,\frac{\partial F}{\partial K_{t+s}}K_{t+s} - q_{t+s}\,I_{t+s}\right] + \lim_{s\to\infty}\left(\frac{1}{(1+r)^s}q_{t+s}\,K_{t+s+1}\right) \qquad [032]$$

où le dernier terme est nul en vertu de la condition de transversalité

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{(1+r)^s}q_{t+s}\,K_{t+s+1} = 0 \qquad [033]$$

La condition de transversalité[6]

Soit le problème avec un horizon fini T

$$MAX\ V = \sum_{t=0}^{T}\frac{1}{(1+r)^t}\left[p_tF(K_t,L_t) - w_tL_t - q_t\left(K_{t+1} - (1-\delta)K_t\right)\right] \qquad [034]$$

$$\text{s.c. } K_0 = \overline{K}_0 \qquad [005]$$

On peut récrire la fonction objectif comme

$$MAX\ V = \sum_{t=0}^{T}\frac{1}{(1+r)^t}\left[p_tF(K_t,L_t) - w_tL_t\right] - \sum_{t=0}^{T}\frac{1}{(1+r)^t}q_tK_{t+1} + \sum_{t=0}^{T}\frac{1}{(1+r)^t}q_t(1-\delta)K_t \qquad [035]$$

Puisqu'il ne peut pas y avoir de production en T+1 et que, par hypothèse, le capital peut être vendu à la fin de la période T, rien n'impose que le capital restant K_{T+1} soit strictement positif. Il s'ensuit qu'un programme ne peut pas être optimal si le dernier terme de la seconde sommation est positif, c'est-à-dire si

$$\frac{1}{(1+r)^T}q_TK_{T+1} > 0 \qquad [036]$$

Ou bien le capital restant est nul, ou bien sa valeur est nulle. D'où, la condition de *transversalité*, c'est-à-dire la condition de *traversée* de la ligne d'horizon :

$$\frac{1}{(1+r)^T}q_TK_{T+1} = 0 \qquad [037]$$

Cette condition demeure vraie, quelle que soit la longueur de l'horizon T. Lorsque l'horizon est indéfiniment éloigné, tout programme optimal doit donc respecter

---

[6] Source : Murat Yildizoglu, Notes de cours de croissance économique, Université de Bordeaux 4, mars 1999
http://yildizoglu.u-bordeaux4.fr/croisemfweb/croisemfweb.html
http://yildizoglu.u-bordeaux4.fr/croisemfweb/node21.html

$$\underset{T\to\infty}{Lim} \frac{1}{(1+r)^T} q_T K_{T+1} = 0 \qquad [038]$$

Cela implique évidemment, pour $s = T - t$,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{(1+r)^{t+s}} q_{t+s} K_{t+s+1} = \frac{1}{(1+r)^t} \lim_{s\to\infty} \frac{1}{(1+r)^s} q_{t+s} K_{t+s+1} = 0 \qquad [033]$$

On a donc

$$q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[p_{t+s} \frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} K_{t+s} - q_{t+s} I_{t+s} \right] \qquad [039]$$

Nous nous écartons maintenant des hypothèses de Nickell (1978) et, au lieu de rendements à l'échelle strictement décroissants, nous supposons des rendements constants. La fonction de production $F(K_t,L_t)$ est alors homogène du premier degré, ce qui implique la condition d'Euler

$$F(K_t, L_t) = \frac{\partial F}{\partial K_t} K_t + \frac{\partial F}{\partial L_t} L_t \qquad [040]$$

C'est-à-dire, étant donné la condition première [016],

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} K_t = p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t \qquad [041]$$

Et on peut donc récrire [039]

$$q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s} L_{t+s} - q_{t+s} I_{t+s} \right] \qquad [042]$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s} L_{t+s} - q_{t+s} I_{t+s} \right]}{q_t K_{t+1}} = 1 \qquad [043]$$

Le numérateur de [043] est la valeur présente à la période t des flux de trésorerie de l'entreprise à partir de la période t+1; le taux d'actualisation est celui du marché, de sorte que cette valeur présente correspond à l'évaluation boursière qui se trouve au numérateur du « q » de Tobin. Remarquons le décalage d'une période : le capital disponible à la période t+1 doit avoir été investi à la période t (ou réinvesti, c'est-à-dire non désinvesti); les flux de trésorerie à prendre en compte sont donc ceux à partir de la période t+1. Au dénominateur de [043], on a le coût de remplacement à la période t du capital qui sera utilisé à partir de la période t+1 (il s'agit bien du coût de remplacement, et non du coût d'usage). Le rapport du membre de gauche de [043] est donc bien le « q » de Tobin : l'investissement consenti en t est optimal quand ce rapport est égal à 1.

1.1.4 L'équilibre intertemporel du capital

On reformule [017] pour exprimer q_{t-1} en fonction des valeurs futures, puis, en faisant des substitutions successives pour $t+1$, $t+2$, etc., on trouve (voir les détails en A2.3) :

$$q_t = \frac{1}{(1+r)}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(1-\delta)^3}{(1+r)^2} q_{t+3} + \dfrac{(1-\delta)^2}{(1+r)^2} p_{t+3} \dfrac{\partial F}{\partial K_{t+3}} \\ + \dfrac{(1-\delta)}{(1+r)} p_{t+2} \dfrac{\partial F}{\partial K_{t+2}} \\ + p_{t+1} \dfrac{\partial F}{\partial K_{t+1}} \end{array}\right\} \qquad [044]$$

ou encore, après développement :

$$q_t = \left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{\theta} q_{\theta} + \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=1}^{\theta} \left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{s-1} p_{t+s} \frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} \qquad [045]$$

Le premier des deux termes du membre de droite est la valeur présente de ce que rapporterait, à la période θ, la vente d'une unité de capital achetée à la période t, qui aurait subi $\theta - t$ périodes de dépréciation. Le second est la valeur présente du flux de valeurs des produits marginaux du capital à partir de la période t+1 et jusqu'à la période θ.

Puisque l'horizon du problème de maximisation [015] est indéfiniment éloigné, on peut faire tendre θ vers l'infini pour obtenir

$$q_t = \underset{\theta \to \infty}{Lim} \left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{\theta} q_{\theta} + \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{s-1} p_{t+s} \frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} \qquad [046]$$

Dans cette équation, le premier terme du membre de droite doit être nul. D'abord, avec des prix q_t et un taux d'actualisation r positifs, il ne peut pas être négatif, à moins que le taux de dépréciation δ ne soit supérieur à 1, ce qui serait absurde. Ensuite, pour qu'il soit positif, il faudrait qu'à long terme, le prix du capital q_t croisse à un taux supérieur à

$$\frac{1+r}{1-\delta} - 1 = \frac{r+\delta}{1-\delta} \qquad [047]$$

Intuitivement, une telle tendance à l'augmentation du prix q_t serait de nature à inciter la firme à acquérir du capital dans le but de réaliser un gain spéculatif à la revente. De façon plus rigoureuse, si

$$\underset{\theta \to \infty}{Lim} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^{\theta} q_{\theta} > 0 \qquad [048]$$

l'équation [046] implique

$$q_t > \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^{s-1} p_{t+s} \frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} \qquad [049]$$

Cela signifie que la firme est prête à payer, pour une unité marginale de capital, davantage que la valeur présente du flux de produit marginal que peut engendrer cette unité marginale si elle est conservée à l'infini. Cela correspond très exactement à la définition de la spéculation que donnent Harrison et Kreps (1975, cités par Tirole, 1982), suivant Kaldor et Keynes : « investors exhibit speculative behavior if the right to resell [an] asset makes them willing to pay more for it than they would pay if obliged to hold it forever ».

Pour exclure cette possibilité, on impose la condition d'absence de bulles spéculatives,

$$\lim_{t \to \infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^{t} q_t = 0 \qquad [050]$$

Avec cette condition, [046] devient

$$q_t = \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^{s-1} p_{t+s} \frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} \qquad [051]$$

La condition d'équilibre [051], comme la condition [017] dont elle découle, fait bien ressortir le caractère intertemporel du problème du producteur. Car, dans l'hypothèse de concurrence, où le producteur est *price-taker*, il n'a pas d'influence sur le prix de remplacement du capital q_t, ni sur les prix futurs de son produit p_{t+s}. La seule manière qu'il a de respecter [051] est, selon les prix p_{t+s} qu'il anticipe, d'ajuster le produit marginal du capital des périodes futures $\frac{\partial F}{\partial K_{t+s}}$; pour cela, il doit réguler l'évolution du stock de capital, c'est-à-dire faire à chaque période les investissements nécessaires.

1.1.5. Coût d'usage du capital avec anticipations stationnaires

Nous allons montrer que, sous l'hypothèse d'anticipations stationnaires, le coût d'usage du capital se ramène à sa forme usuelle en l'absence d'inflation.

Pour alléger la notation, dénotons la valeur du produit marginal du capital par

$$R_t = p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} \qquad [052]$$

L'équation [051] s'écrit

$$q_t = \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^s R_{t+s+1} \qquad [053]$$

Si, dans cette expression, nous remplaçons R_{t+s+1} par $\tilde{R}_{t+s}$, sa valeur anticipée au temps *t*, et si nous supposons que cette valeur soit constante (anticipations stationnaires) :

$$\tilde{R}_{t+s} = R_t, \forall s \geq 0 \qquad [054]$$

alors la condition [053] se ramène à :

$$R_t = (r+\delta) q_t \qquad [055]$$

(les détails se trouvent à l'annexe A2.4)

Le membre de droite de cette équation correspond à la forme usuelle du coût d'usage du capital en l'absence d'inflation du prix de remplacement du capital :

$$\bar{u}_t = (r+\delta) q_t \qquad [056]$$

Dans ces circonstances, en effet,

$$\pi_t = \frac{(q_t - q_{t-1})}{q_{t-1}} = 0 \text{, ce qui implique } q_t = q_{t-1} \qquad [057]$$

En somme, en présence des anticipations stationnaires [054], le coût d'usage du capital [022] est ramené à sa forme usuelle [056] et la condition d'équilibre [018] est ramenée à

$$R_t = (r+\delta) q_t = \bar{u}_t \qquad [058]$$

1.2 UN MODÈLE AVEC COÛTS D'AJUSTEMENT

Nickell (1978) développe au chapitre 3 un modèle théorique avec coûts d'ajustement[7]. Il pose l'hypothèse suivante :

8. Il y a des coûts d'ajustement associés à des variations du stock de capital. Ces coûts sont fonction de l'investissement brut, ils croissent avec la valeur absolue du taux d'investissement ou de désinvestissement et, qui plus est, ils croissent à un taux croissant. Ils ne sont nuls que quand l'investissement brut est nul.

Formellement, cela implique une fonction de coûts d'ajustement $C(I_t)$ ayant les propriétés suivantes (Nickell, 1978, p. 27) :

$$C'(I_t) > ou < 0 \Leftrightarrow I_t > ou < 0 \qquad [059]$$

$$C(0) = 0 \qquad [060]$$

$$C''(I_t) > 0 \qquad [061]$$

Parmi les formes fonctionnelles qui respectent ces propriétés, on a[8] :

$$C(I_t) = q_t \frac{\gamma}{2} I_t^2 \qquad [062]$$

C'est un modèle où les coûts d'ajustement sont indépendants du stock de capital. On présente à l'annexe 1 un modèle où les coûts d'ajustement sont fonction du volume des investissements et inversement proportionnels au stock de capital.

1.2.1 Conditions premières de l'optimum

Comme auparavant, la firme maximise la valeur présente de son flux de trésorerie. Si l'on suppose le taux d'actualisation constant, le problème de maximisation est donc :

$$MAX\ V = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t - C(I_t) \right] \qquad [063]$$

$$\text{s.c. } I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t = K_{t+1} - (1-\delta) K_t \qquad [014]$$

---

7 Épaulard (1993) parle de coûts d'installation.

8 Il est à noter que la fonction de coûts [062] est parfois présentée sous la forme

$$C(I_t) = \frac{\gamma}{2} I_t^2$$

et $K_0 = \overline{K}_0$ [005]

La solution conduit aux conditions de premier ordre (détails à l'annexe A2.5) :

$$p_t \frac{\partial F}{\partial L_t} = w \quad [016]$$

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = (1+r)q_{t-1}\left(1+\gamma I_{t-1}\right) - q_t\left(1+\gamma I_t\right)(1-\delta) \quad [064]$$

$$I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t \quad [014]$$

$$K_0 = \overline{K}_0 \quad [005]$$

Posons

$$Q_t = \frac{\partial}{\partial I_t}\left[q_t I_t\left(1+\frac{\gamma}{2}I_t\right)\right] = q_t\left(1+\gamma I_t\right) \quad [065]$$

C'est le coût marginal, ou prix implicite, de l'investissement. Et en substituant [065] dans [064], on peut écrire

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = (1+r)Q_{t-1} - (1-\delta)Q_t \quad [066]$$

1.2.2 Coût d'usage du capital avec coûts d'ajustement

Définissons le taux rétrospectif d'augmentation du coût marginal du capital

$$\Pi_t = \frac{(Q_t - Q_{t-1})}{Q_{t-1}} \quad [067]$$

de sorte que

$$(Q_t - Q_{t-1}) = \frac{(Q_t - Q_{t-1})}{Q_{t-1}}Q_{t-1} = \Pi_t Q_{t-1} \quad [068]$$

On peut récrire [066]

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = r\,Q_{t-1} + \delta Q_t - (Q_t - Q_{t-1}) \quad [069]$$

---

auquel cas [202] s'écrit

$$MAX\ V = \sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^t}\left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t - q_t C(I_t)\right]$$

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = (r - \Pi_t) Q_{t-1} + \delta Q_t \qquad [070]$$

Le membre de droite de cette équation est la valeur du produit marginal du capital à la période *t*. Par ailleurs, le membre de gauche est le coût d'usage du capital en présence de coûts d'ajustement :

$$U_t = (r - \Pi_t) Q_{t-1} + \delta Q_t \qquad [071]$$

On peut donc écrire [066] comme

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = U_t \qquad [072]$$

L'équation [072] est l'équivalent de [021], modifiée pour tenir compte de la présence de coûts d'ajustement.

1.2.3 Le « q » de Tobin dans les conditions premières

Peut on retrouver le « *q* » de Tobin dans le modèle qui vient d'être énoncé ?

Dénotons la productivité marginale en valeur du capital

$$R_t = p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} \qquad [052]$$

On développe [066] et on trouve (voir les détails en A2.6)[9] :

$$Q_t K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)} \left[(1-\delta) Q_{t+1} K_{t+1} + R_{t+1} K_{t+1} \right] \qquad [073]$$

On remplace $(1 - \delta) K_{t+1}$ par son équivalent selon [030] (qui est une reformulation de la contrainte d'accumulation [014]) et on trouve

$$Q_t K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)} \left(R_{t+1} K_{t+1} - Q_{t+1} I_{t+1} + Q_{t+1} K_{t+2} \right) \qquad [074]$$

où on peut remplacer le terme $Q_{t+1} K_{t+2}$ par son expression selon cette même relation. Il vient

$$Q_t K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)} \begin{bmatrix} R_{t+1} K_{t+1} - Q_{t+1} I_{t+1} \\ + \frac{1}{(1+r)} \left(R_{t+2} K_{t+2} - Q_{t+2} I_{t+2} + Q_{t+2} K_{t+3} \right) \end{bmatrix} \qquad [075]$$

---

9 Le développement qui suit est parallèle à celui de Hayashi (1982) tel que reproduit dans Nabil Annabi, *Les MÉGC avec anticipations rationnelles : introduction*, présentation diapo, mars 2003; voir les diapositives No 38 et suivantes.

Par substitutions successives de $Q_{t+s}\, K_{t+s+1}$, on arrive à

$$Q_t\, K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[R_{t+s}\, K_{t+s} - Q_{t+s}\, I_{t+s} \right] + \lim_{s \to \infty} \left(\frac{1}{(1+r)^s} Q_{t+s}\, K_{t+s+1} \right) \qquad [076]$$

où le dernier terme est nul en vertu de la condition de transversalité

$$\lim_{s \to \infty} \left(\frac{1}{(1+r)^s} Q_{t+s}\, K_{t+s+1} \right) = 0 \qquad [077]$$

On a donc

$$Q_t\, K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[R_{t+s}\, K_{t+s} - Q_{t+s}\, I_{t+s} \right] \qquad [078]$$

Comme précédemment, nous nous écartons des hypothèses de Nickell (1978) et, au lieu de rendements à l'échelle strictement décroissants, nous supposons des rendements constants. La fonction de production $F(K_t,K_t)$ est alors homogène du premier degré, ce qui implique la condition d'Euler [040]. Étant donné la condition première [016], on a alors

$$R_t K_t = p_t\, F(K_t, L_t) - w_t\, L_t \qquad [079]$$

Remplaçons $R_{t+s}\, K_{t+s}$ dans [078] :

$$Q_t\, K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s}\, L_{t+s} - Q_{t+s}\, I_{t+s} \right] \qquad [080]$$

Substituons ensuite à Q_t sa définition selon [065]. Après quelques manipulations (détails en A2.6), on arrive à

$$\frac{\displaystyle\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[\begin{array}{l} p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s}\, L_{t+s} \\ - q_{t+s}\, I_{t+s} \left(1 + \frac{\gamma}{2} I_{t+s} \right) \end{array} \right]}{Q_t\, K_{t+1}} = 1 + \frac{\displaystyle\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[q_{t+s}\, I_{t+s} \left(\frac{\gamma}{2} I_{t+s} \right) \right]}{Q_t\, K_{t+1}} \qquad [081]$$

Le numérateur du membre de gauche de [081] est la valeur présente à la période t des flux de trésorerie de l'entreprise à partir de la période t+1; le taux d'actualisation est celui du marché, de sorte que cette valeur présente correspond à l'évaluation boursière qui se trouve au numérateur du « q » de Tobin. Remarquons le décalage d'une période : le capital disponible à la période t+1 doit avoir été investi à la période t (ou réinvesti, c'est-à-dire non désinvesti); les flux de trésorerie à prendre en compte sont donc ceux à partir de la période t+1. Au dénominateur du membre de gauche de [081], on a le coût marginal de remplacement à la période *t* du capital qui sera utilisé à partir de la période *t*+1 (il s'agit bien du coût marginal de remplacement, et non du coût d'usage). Le rapport du membre de gauche de [081] est donc analogue au « *q* » de Tobin. Mais à la différence du « *q* » de Tobin, le dénominateur de ce rapport n'est pas un prix constant, mais un coût marginal qui tient compte des coûts d'ajustement. En outre, contrairement au résultat de Tobin, l'investissement consenti en *t* est optimal, non pas quand ce rapport est égal à 1, mais quand il est égal à une certaine valeur supérieure à 1, comme l'indique le membre de droite de [081]. Par rapport à la règle de Tobin, ce modèle-ci conduit à moins d'investissement. Cela s'explique par le fait que le coût d'ajustement est indépendant du stock de capital, de sorte que, la fonction de coûts d'ajustement n'étant pas homogène du premier degré, les conditions requises par la démonstration de Hayashi (1982) ne sont pas remplies. Par contre, on peut montrer que, si la fonction de coûts d'ajustement était plutôt de la forme

$$C(I_t, K_t) = q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_t^2}{K_t} \qquad [082]$$

alors les conditions de Hayashi (1982) sont remplies et un développement analogue à ce qui précède conduit à la condition d'équilibre

$$\frac{\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s} L_{t+s} - q_{t+s} I_{t+s} \left(1 + \frac{\gamma}{2} \frac{I_{t+s}}{K_{t+s}} \right) \right]}{Q_t K_{t+1}} = 1 \qquad [083]$$

dont le membre de gauche est identique à celui de [081] (détails à l'annexe A1).

1.2.4 L'équilibre intertemporel du capital

La condition [066] équivaut à

$$Q_t = \frac{(1+r)}{(1-\delta)} Q_{t-1} - \frac{1}{(1-\delta)} p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} \qquad [084]$$

que l'on récrit comme

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \left\{ (1-\delta) Q_{t+1} + p_{t+1} \frac{\partial F}{\partial K_{t+1}} \right\} \qquad [085]$$

En faisant des substitutions successives pour $t+1$, $t+2$, etc., on trouve (détails en A2.7) :

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(1-\delta)^3}{(1+r)^2} Q_{t+3} + \dfrac{(1-\delta)^2}{(1+r)^2} p_{t+3} \dfrac{\partial F}{\partial K_{t+3}} \\ + \dfrac{(1-\delta)}{(1+r)} p_{t+2} \dfrac{\partial F}{\partial K_{t+2}} \\ + p_{t+1} \dfrac{\partial F}{\partial K_{t+1}} \end{array} \right\} \qquad [086]$$

Avec la condition d'absence de bulles,

$$\lim_{t \to \infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^t Q_t = 0 \qquad [087]$$

et après développement, on obtient :

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^{s-1} p_{t+s} \frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} \qquad [088]$$

Étant donné [052], on peut écrire de façon équivalente

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^{s-1} R_{t+s} \qquad [089]$$

La condition [089] montre donc qu'à l'optimum, le coût marginal du capital doit être égal à son revenu marginal, qui est la somme actualisée des flux de revenus futurs qu'il engendre, c'est-à-dire des valeurs R_{t+s} des produits marginaux[10]. Ces flux diminuent dans le temps au fur et à mesure de la dépréciation du capital; d'où, le facteur d'attrition $(1-\delta)^{s-1}$.

1.2.5 Demande d'investissement avec anticipations stationnaires

L'équation du coût marginal du nouveau capital :

$$Q_t = \frac{\partial}{\partial I_t} \left[q_t I_t \left(1 + \frac{\gamma}{2} I_t \right) \right] = q_t \left(1 + \gamma I_t \right) \qquad [065]$$

équivaut à

$$I_t = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{Q_t}{q_t} - 1 \right) \qquad [091]$$

Cette relation peut s'interpréter comme une demande d'investissement, mais l'équation

---

[10] Les coûts d'ajustement étant indépendants de la quantité de capital déjà en place, il n'y a pas de coûts futurs évités, contrairement à ce que l'on peut voir à l'équation [252] de l'annexe A1.

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^{s-1} R_{t+s} \qquad [089]$$

montre que Q_t dépend des valeurs futures R_{t+s}, de sorte que sa valeur n'est pas connue à la période t, à moins que l'on fasse des hypothèses sur les valeurs anticipées de R_{t+s}. Supposons que $\tilde{R}_{t+s}$, la valeur anticipée au temps t de R_{t+s}, soit constante (anticipations stationnaires) :

$$\tilde{R}_{t+s} = R_t , \forall s \geq 0 \qquad [054]$$

On obtient

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^{s-1} \tilde{R}_{t+s} \qquad [092]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^{s-1} R_t \qquad [093]$$

On peut réécrire cette équation en utilisant la formule d'une suite géométrique :

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^{s} = \left(\frac{1}{1-\frac{1-\delta}{1+r}} \right) \qquad [094]$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^{s} = \frac{1}{\left(\frac{r+\delta}{1+r} \right)} \qquad [095]$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^{s} = \frac{1+r}{r+\delta} \qquad [096]$$

On substitue [096] et [054] dans [089] et il vient

$$Q_t = \frac{1}{(r+\delta)} R_t \qquad [097]$$

$$R_t = (r+\delta) Q_t \qquad [098]$$

En substituant [097] dans [091] on trouve l'équation de demande d'investissement avec anticipations stationnaires en présence de coûts d'ajustement de la forme [062] :

$$I_t = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{R_t}{(r+\delta) q_t} - 1 \right) \qquad [099]$$

Le dénominateur de R_t dans [099] est égal à

$$\bar{u}_t = (r+\delta)\, q_t \qquad [056]$$

C'est le coût d'usage du capital avec anticipations stationnaires en l'absence de coûts d'ajustement, alors que la condition d'équilibre [018] se réduit à [058] :

$$R_t = (r+\delta) q_t = \bar{u}_t \qquad [058]$$

Avec les anticipations stationnaires [054] et en l'absence de coûts d'ajustement, $\gamma = 0$ et $Q_t = q_t$, de sorte que [097] se réduit à [058].

1.2.6 Tobin's « q » again

In equation [099], the ratio $\frac{R_t}{(r+\delta)q_t}$ can be interpreted as an approximation of Tobin's « *q* ».

Indeed, with myopic expectations, the present value of the income[11] expected from one unit of capital is

$$\sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{(1-\delta)^{\theta-1}}{(1-r)^{\theta}} R_t = \frac{R_t}{1-\delta} \sum_{\theta=1}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{\theta} = \frac{R_t}{(r+\delta)}$$

which can be interpreted as the market value of a unit of capital. So $\frac{R_t}{(r+\delta)q_t}$ is the ratio of the market value of a unit of capital to its replacement cost q_t, *ignoring adjustment costs*. Investment demand [099] is a function of the discrepancy between Tobin's « *q* » without adjustment costs, and the value 1. The greater parameter γ, the greater the adjustment cost, and the smaller the fraction of the discrepancy that will be eliminated by the optimal investment.

1.2.7 Réflexion sur l'hypothèse d'anticipations stationnaires

L'hypothèse d'anticipations stationnaires

$$\tilde{R}_{t+s} = R_t, \forall s \geq 0 \qquad [054]$$

est-elle compatible avec le modèle ? Voyons ce qu'elle implique. Remarquons d'abord que l'équation [097] dit qu'avec les anticipations stationnaires décrites en [054], la valeur du coût

---

[11] Note that *income* is a different concept from the cash flow in terms of which Tobin's « *q* » was discussed in section 1.2.3 above.

marginal du nouveau capital que l'on anticipe en t pour la période $t+s$ est constante également :

$$\tilde{Q}_{t+s} = \frac{1}{(r+\delta)} \tilde{R}_{t+s} = \frac{1}{(r+\delta)} R_t \qquad [100]$$

Et l'équation de demande d'investissement [099] dit aussi que, si la valeur anticipée du coût de remplacement du capital $\tilde{q}_{t+s}$ est constante (ce qui serait cohérent avec des anticipations stationnaires quant au prix p_t), alors le volume d'investissement anticipé dans le futur est également constant, égal à l'investissement de la période courante :

$$\tilde{I}_{t+s} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\tilde{q}_{t+s}} \frac{1}{(r+\delta)} \tilde{R}_{t+s} - 1\right) = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{q_t} \frac{1}{(r+\delta)} R_t - 1\right) = I_t \qquad [101]$$

On n'a pas à s'interroger sur la compatibilité des relations [100] et [101] : la relation [100] est une implication de [097]; quant à [101], elle est une conséquence de [099], qui découle aussi de [097] et de la définition de Q_t [065].

Examinons maintenant de plus près l'hypothèse même d'anticipations stationnaires

$$\tilde{R}_{t+s} = R_t, \forall s \geq 0 \qquad [054]$$

Si on suppose aussi des anticipations stationnaires pour le prix p_t, alors il faut que $\frac{\partial F}{\partial K_t}$ puisse être constant pour que

$$R_t = p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} \qquad [052]$$

puisse l'être. Mais le produit marginal $\frac{\partial F}{\partial K_t}$ peut-il être constant alors que l'investissement net n'est pas nul et que la quantité de capital K_t varie dans le temps ? Car le stock de capital anticipé de chaque période future est donné par

$$\tilde{K}_{t+s} = (1-\delta)\tilde{K}_{t+s-1} + \tilde{I}_{t+s-1} \qquad [102]$$

$$\tilde{K}_{t+s} = (1-\delta)\left[(1-\delta)\tilde{K}_{t+s-2} + \tilde{I}_{t+s-2}\right] + \tilde{I}_{t+s-1} \qquad [103]$$

ce qui, étant donné [101], conduit par récurrence à

$$\widetilde{K}_{t+s} = (1-\delta)^s K_t + I_t \left(\sum_{\theta=1}^{s} (1-\delta)^{\theta-1} \right) \quad [104]$$

Il est clair qu'il est possible d'ajuster la quantité de travail L_t à chaque période future de manière à maintenir constant le produit marginal du capital $\frac{\partial F}{\partial K_t}$ avec un stock de capital défini par [104]. Mais est-ce optimal ?

Si l'on suppose que les rendements sont constants à l'échelle, la fonction de production est homogène du premier degré et vérifie la condition d'Euler

$$F(K_t, L_t) = \frac{\partial F}{\partial K_t} K_t + \frac{\partial F}{\partial L_t} L_t \quad [040]$$

À partir de [040], on trouve

$$\frac{\partial F}{\partial K_t} = \frac{F(K_t, L_t)}{K_t} - \frac{L_t}{K_t} \frac{\partial F}{\partial L_t} \quad [105]$$

$$\frac{\partial F}{\partial K_t} = F\left(1, \frac{L_t}{K_t}\right) - \frac{L_t}{K_t} \frac{\partial F}{\partial L_t} \quad [106]$$

Étant donné la condition première d'optimum

$$p_t \frac{\partial F}{\partial L_t} = w_t \quad [016]$$

on obtient par substitution

$$\frac{\partial F}{\partial K_t} = F\left(1, \frac{L_t}{K_t}\right) - \frac{L_t}{K_t} \frac{w_t}{p_t} \quad [107]$$

Avec des rendements à l'échelle constants et sous l'hypothèse d'anticipations stationnaires pour p_t, w_t et Q_t, le produit marginal du capital $\frac{\partial F}{\partial K_t}$ est donc constant si le rapport optimal $\frac{L_t}{K_t}$ l'est aussi. L'est-il ?

Reprenons les conditions premières d'optimum

$$p_t \frac{\partial F}{\partial L_t} = w_t \quad [016]$$

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = (1+r)Q_{t-1} - (1-\delta)Q_t \quad [066]$$

Sous l’hypothèse [054] d’anticipations stationnaires, la seconde condition devient

$$Q_t = \frac{1}{(r+\delta)} R_t \qquad [097]$$

c’est-à-dire, étant donné la définition [052],

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = (r+\delta) Q_t \qquad [108]$$

Dans la condition d’Euler

$$F(K_t, L_t) = \frac{\partial F}{\partial K_t} K_t + \frac{\partial F}{\partial L_t} L_t \qquad [040]$$

on substitue à partir de [016] et [108] :

$$F(K_t, L_t) = \frac{(r+\delta)Q_t}{p_t} K_t + \frac{w_t}{p_t} L_t \qquad [109]$$

$$F\left(1, \frac{L_t}{K_t}\right) = \frac{(r+\delta)Q_t}{p_t} + \frac{w_t}{p_t}\frac{L_t}{K_t} \qquad [110]$$

Avec des rendements à l’échelle constants et sous l’hypothèse d’anticipations stationnaires pour p_t, w_t et Q_t, le rapport $\frac{L_t}{K_t}$ qui est optimal à la période t l’est donc aussi pour toutes les périodes à venir.

On peut conclure que l’hypothèse d’anticipations stationnaires [054] n’introduit dans le modèle aucune contradiction.

2. Modèles appliqués de la demande d'investissement

Nous passons en revue dans cette section les modèles de la demande d’investissement qui se rattachent, de près ou de loin, au modèle théorique exploré dans le chapitre précédent.

2.1 Bourguignon, Branson et de Melo, J. (1989)

Examinons d’abord la formulation de Bourguignon, Branson et de Melo (1989), reprise par Decreux (2003).

Dénotons le coût d’usage avec anticipations stationnaires comme

$$\bar{u}_t = (r+\delta) q_t \qquad [056]$$

Récrivons [099]

$$I_t = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{R_t}{\bar{u}_t} - 1\right) \qquad [111]$$

Cette dernière équation est de même forme que la fonction théorique de demande d'investissement par la firme représentative d'une industrie, telle que posée par Bourguignon *et al*. (1989, p. 23, équation 4.21 dans leur document) :

$$I_t = a\left\{\frac{p^n MP_k U}{q(\delta + J^F)} - 1\right\} = a\left\{\frac{B}{C} - 1\right\} \geq 0 \qquad [112]$$

où

p^n est le prix de la valeur ajoutée

MP_k est le produit marginal du capital

U est le taux sectoriel d'utilisation de la capacité

q est le prix des biens de capital

δ est le taux de dépréciation

J^F est l'« opportunity cost of credit » (équation 4.22 dans leur document)

et où l'investissement est contraint à être non négatif.

On peut rapprocher le B et le C, de Bourguignon *et al.*, du R_t et du $\bar{u}_t$ de [111] respectivement.

L'investissement sera positif si le rapport $\frac{R_t}{\bar{u}_t}$ est supérieur à 1. Il est rentable d'investir lorsque la valeur du produit marginal du capital est supérieure à son coût d'usage.

Bourguignon *et al.* (1989) ajoutent cependant : « However, with this specification, the model exhibits extreme fluctuations to changes in the relative profitability of investment caused by interest rate or expectation changes. For this reason, real investment is given by the quadratic expression » (p. 28)

$$\frac{I_t}{K_t} = q\gamma_1\left[\left(\frac{B}{C}\right)^2 + \gamma_2\left(\frac{B}{C}\right)\right] \qquad [113]$$

où

- γ_1 et γ_2 « are suitably selected paramenters so that in equilibrium when $\left(\frac{B}{C}\right)$ = 1, investment will be at a level which will ensure a rate of growth of net capital stock equal to *g*.

The elasticity of investment with respect to a change in profitability, $\frac{\partial I}{\partial\left(\frac{B}{C}\right)}$, evaluated at $\left(\frac{B}{C}\right)=1$ is equal to a predetermined value *e* » (p. 28; voir aussi la figure 3, p. 30 dans Bourguignon et al.).

Cette formulation s'écarte de la formulation théorique [112] sur deux points : (1) c'est l'équation du taux d'accumulation $\frac{I_t}{K_t}$, et non pas de l'investissement comme tel et (2) c'est une forme quadratique du rapport $\frac{R_t}{\bar{u}_t}$, plutôt qu'une fonction linéaire de la différence $\frac{R_t}{\bar{u}_t}-1$.

La première différence se justifie assez bien si l'on se rappelle que le modèle théorique de Nickell concerne une firme individuelle. S'agissant de la « firme représentative » dans un modèle dynamique d'équilibre général, on peut penser que les investissements augmenteront avec le nombre de firmes. Et si l'on admet que le nombre de firmes croît en proportion du stock de capital, il est approprié d'écrire la fonction d'investissement agrégée comme

$$\frac{I_t}{K_t}=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{R_t}{\bar{u}_t}-1\right) \qquad [114]$$

D'ailleurs, telle quelle, la fonction d'investissement micro-économique de Nickell

$$I_t=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{R_t}{\bar{u}_t}-1\right) \qquad [111]$$

ne peut pas engendrer une trajectoire régulière, c'est-à-dire une trajectoire où les prix sont constants et où les quantités croissent au taux exogène de croissance de l'offre de travail (taux de croissance démographique) : si $\frac{R_t}{\bar{u}_t}$ est constant, l'investissement l'est aussi et la seule trajectoire régulière qui puisse en résulter est un état stationnaire au sens strict, sans croissance (sinon, avec une quantité constante d'investissement, le taux de croissance du capital décroît).

Quant à la seconde différence, elle semble de nature *ad hoc*, sans fondement théorique clair. C'est pourquoi le choix se porterait normalement sur la formulation théoriquement exacte. D'où, la nécessité de comprendre ce que signifie au juste « the model exhibits extreme fluctuations to changes in the relative profitability of investment caused by interest rate or expectation changes ». Des expériences avec un modèle de petite taille nous ont permis de déterminer que la forme [114] implique un niveau d'élasticité de la demande d'investissement qui est tout simplement trop élevé pour que le modèle soit stable (nous reviendrons sur ce point en 4.3).

2.2 JUNG ET THORBECKE (2001)

L'équation d'investissement par destination i de Jung et Thorbecke (2001, équation 41) est la suivante :

$$\frac{INV_{it}}{K_{it}} = A_i \left(\frac{KINC_{it}}{PK_{it}\, K_{it}\, r_t} \right)^{\beta_i} \qquad [115]$$

où

INV_{it} est l'investissement par destination;

K_{it} est le stock de capital du secteur i;

$KINC_{it}$ est le revenu du capital;

PK_{it} est le prix du bien d'investissement du secteur i;

r_t est le taux d'intérêt, qui joue le rôle de taux d'actualisation;

A_i et β_i sont des paramètres.

La valeur de l'élasticité β_i est fixée à 1[12].

On reconnaît facilement dans le produit $PK_{it}\, K_{it}$ le coût de remplacement du capital. Par ailleurs, le rapport $\frac{KINC_{it}}{r_t}$ est la valeur présente, actualisée au taux courant r_t, d'un flux perpétuel de revenu de $KINC_{it}$ par période, commençant à la période t+1. On peut considérer cela comme une approximation de la valeur boursière de l'industrie i. Il s'ensuit que le rapport $\left(\frac{KINC_{it}}{PK_{it}\, K_{it}\, r_t} \right)$ peut s'interpréter comme une approximation du « q » de Tobin.

Plus formellement, comparons le rapport $\left(\frac{KINC_{it}}{PK_{it}\, K_{it}\, r_t} \right)$ avec le « q » de Tobin du modèle de base en temps discret développé en 1.1.3 :

---

[12] Communication privée de Nabil Annabi avec Hong Sang Jung.

$$\frac{\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^s}\left[p_{t+s}F(K_{t+s},L_{t+s})-w_{t+s}\,L_{t+s}-q_{t+s}\,I_{t+s}\right]}{q_t\,K_{t+1}}=1 \qquad [043]$$

Si, dans [043], on suppose des anticipations stationnaires, sans investissements futurs, le numérateur devient

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^s}\left[p_tF(K_t,L_t)-w_t\,L_t\right]=\frac{1}{r}\left[p_tF(K_t,L_t)-w_t\,L_t\right] \qquad [116]$$

où $\left[p_tF(K_t,L_t)-w_t\,L_t\right]$ est le revenu du capital à la période courante, l'équivalent, dans notre notation, du $KINC_{it}$ de Jung et Thorbecke (2001, équation 22 dans leur texte). Le numérateur du membre de droite de [115] n'est donc pas tout à fait le numérateur du « q » de Tobin. Le fait d'ignorer le terme $q_{t+s}\,I_{t+s}$ revient en quelque sorte à ignorer la dépréciation, puisqu'il n'y a même pas d'investissement de remplacement. C'est pourquoi on parle d'une approximation.

Dans le modèle de Jung et Thorbecke (2001), le taux d'investissement $\frac{INV_{it}}{K_{it}}$ est donc une fonction à élasticité constante du « q » de Tobin, mais d'une version tronquée de ce dernier, où, en l'absence de dépenses d'investissment, même de remplacement, on ne tient aucun compte de la dépréciation. En pratique, étant donné la forme fonctionnelle, l'investissement de remplacement est implicite dans la constante A_i. Car lorsque le rapport $\left(\frac{KINC_{it}}{PK_{it}\,K_{it}\,r_t}\right)$ est égal à 1, l'équation [115] devient

$$\frac{INV_{it}}{K_{it}}=A_i \qquad [117]$$

La constante A_i est donc l'investissement d'équilibre, c'est-à-dire celui qui prévaut lorsque le « q » de Tobin (tronqué) est égal à 1.

Il est cependant facile de reformuler le modèle de Jung et Thorbecke pour tenir compte de la dépréciation. Il suffit de remplacer le rapport $\frac{KINC_{it}}{r_t}$ par $\frac{KINC_{it}}{r_t+\delta}$. Ce dernier est en effet égal à

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(1-\delta)^{s-1}}{(1+r)^s}KINC_{it}$$

où le flux de revenus futurs décline au fur et à mesure de la dépréciation du capital. On obtient alors

$$\frac{INV_{it}}{K_{it}} = A_i \left(\frac{KINC_{it}}{PK_{it}\, K_{it} \left(r_t + \delta\right)} \right)^{\beta_i} \qquad [118]$$

2.3 AGÉNOR (2003)

Cet auteur présente une version réelle du modèle IMMPA (« Integrated Macroeconomic Model for Poverty Analysis ») de la Banque Mondiale, utilisé dans l'analyse des effets des politiques économiques sur la pauvreté.

Agénor (2003) formule l'équation suivante :

$$\frac{I}{K} = z \left[\frac{profit}{K\, PK \left(i^* + \delta - \frac{\Delta PK}{PK} \right)} \right]^{\sigma} \qquad [119]$$

où

I est le volume d'investissement;

K est le stock de capital;

PK est le prix du bien d'investissement;

i^* est le taux d'intérêt mondial;

δ est le taux de dépréciation du capital;

z est un paramètre d'échelle;

σ est l'élasticité de l'investissement.

Ce modèle est semblable à celui de Jung et Thorbecke (2001), à cette différence près qu'Agénor tient compte de la dépréciation et de l'inflation.

2.4 FARGEIX ET SADOULET (1994)

L'équation d'investissement par destination *i* de Fargeix et Sadoulet (1994) est la suivante :

$$\frac{I_{it}}{K_{it}} = B_i \left(\frac{KINC_{it}\,(1+\pi_t)}{PK_{it}\, K_{it}\,(1+rd_t)} \right)^{\varepsilon_i} \qquad [120]$$

où

I_{it} est l'investissement par destination;

K_{it} est le stock de capital du secteur *i*;

B_i est un paramètre d'échelle;

$KINC_{it}$ est le revenu du capital;

PK_{it} est le prix du bien d'investissement du secteur *i*;

π_t est le taux d'inflation à la période *t*;

rd_t est le taux d'actualisation à la période *t*.

Cette équation ressemble à celle de Jung et Thorbecke (2001), à ceci près que le rapport $\frac{1+\pi_t}{1+rd_t}$ se substitue à $\frac{1}{r_t}$. Le rapport $\frac{KINC_{it}\,(1+\pi_t)}{1+rd_t}$ est la valeur présente au temps *t* d'un revenu de $KINC_{it}\,(1+\pi_t)$ reçu à la période *t*+1, actualisé au taux rd_t. Le rapport $\left(\frac{KINC_{it}\,(1+\pi_t)}{PK_{it}\,K_{it}\,(1+rd_t)}\right)$ est donc apparenté au « *q* » de Tobin. Apparenté, mais pas identique : le numérateur du « *q* » de Tobin serait plutôt donné par

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1+\pi_t}{1+rd_t}\right)^{t+s} KINC_t = \frac{1+\pi_t}{rd_t-\pi_t} KINC_t \qquad [121]$$

pourvu que $rd_t > \pi_t$. On pourrait appeler le rapport $\left(\frac{KINC_{it}\,(1+\pi_t)}{PK_{it}\,K_{it}\,(1+rd_t)}\right)$ un « *q* » tronqué, ou un « *q* » à une seule période future.

La formule de Fargeix et Sadoulet (1994) est donc similaire en pratique à celle de Jung et Thorbecke (2001), mais son lien avec le concept théorique du « *q* » de Tobin est moins rigoureux.

2.5 COLLANGE (1993)

La fonction d'investissement de Collange (1993) est donnée par

$$\frac{I_i}{K_i} = B_i\left(\frac{RK_i}{PK\,K_i}\right)^{\sigma 1}\left(\frac{J_e}{1+PINFL}\right)^{\sigma 2}\left(\frac{Autofin}{Autofin0}\right)^{\sigma 3} \qquad [122]$$

où

B_i est un paramètre d'échelle;

RK_i est le revenu du capital;

PK_i est le prix de remplacement du capital;

K_i est le stock de capital;

j_e est le coût des emprunts;

PINFL est le taux d’inflation;

Autofin est la capacité d’autofinancement des entreprises;

*Autofin*0 est la capacité d’autofinancement des entreprises à l'année de base;

$\sigma 1 > 0$, $\sigma 2 < 0$ et $\sigma 3 > 0$ sont les élasticités de l’investissement.

Cette spécification se rapproche aussi de celle de Jung et Thorbecke (2001). Si $\sigma 2 = -\sigma 1$, le rapport $\left(\frac{J_e}{1+PINFL}\right)$ joue dans le modèle de Collange (1993) le même rôle que le taux d’actualisation r_t dans le modèle de Jung et Thorbecke (2001).

Mais il s’agit, selon l’auteur lui-même, d’une demande d’investissement privé déterminée « de manière *ad hoc* » (Collange, 1993, p. 24) et qui, au surplus, cherche à tenir compte de l’importance de l’autofinancement dans le contexte ivoirien.

2.6 La demande d’investissement dans les MÉGC

Les modèles de la demande présentés ici permettent de répartir l’investissement par industrie, étant donné le montant global de l’épargne. L’équilibre investissement-épargne est assuré par le taux d’intérêt qui joue le rôle de taux d’actualisation et qui entre dans la détermination du coût d’usage du capital : le taux d’intérêt étant le même pour toutes les industries, il s’ensuit que le taux de rendement pour les détenteurs de capital est uniforme entre les industries. L’équilibrage entre la somme des demandes d’investissement et l’épargne disponible est réalisé, soit par l’ajustement de ce taux d’intérêt (taux d’intérêt endogène), soit par l'ajustement du solde du compte courant (épargne du Reste-du-Monde endogène), selon la fermeture du modèle.

Il est à noter que, dans le premier cas, le taux d’intérêt endogène peut avoir pour unique rôle de « rationner » l'épargne disponible. Il ne joue pas à proprement parler le rôle d'un prix, puisque la rémunération du nouveau capital investi n'a pas lieu à la période courante et que, lorsqu'elle a lieu, dans les périodes subséquentes, elle est déterminée indépendamment du taux d'escompte de la période courante. Nous verrons néanmoins que ce taux d’intérêt peut créer un lien entre la problématique de l’investissement par destination et celles de l’épargne et de la dette (deuxième et troisième parties).

3. Modèles de la distribution des investissements par destination

Les modèles de la demande d’investissement ne sont pas la seule approche possible à la détermination des investissements par destination. Il existe un grand nombre de modèles de détermination des parts distributives des industries dans l'investissement total. Certains d'entre eux sont purement *ad hoc*. D'autres ont des liens plus ou moins serrés avec une théorie de l'offre d'investissement. La première section du présent chapitre présente une esquisse d'un modèle de l'offre d'investissement. Les sections suivantes présentent les modèles répertoriés dans les écrits.

3.1 Esquisse d'un modèle de l'offre d'investissement

3.1.1 Un modèle simplifié du capitaliste investisseur

L'objectif du capitaliste investisseur est de maximiser son avoir net. Une unité d'investissement (en volume) est présumée rapporter un montant de rs_i par période, à perpétuité (anticipations stationnaires). Avec un taux d'actualisation de *TIN*, la valeur présente du flux de revenu généré par un volume IND_i de capital est égale à

$$\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{rs_i\, IND_i}{(1+TIN)^t}\right)=\frac{rs_i\, IND_i}{TIN} \qquad [123]$$

où, pour simplifier l'exposé, on ignore la dépréciation.

L'acquisition de ce volume de capital coûte $PK_i\, IND_i$. Le problème du capitaliste investisseur est donc de distribuer son budget d'investissement entre les possibilités *i* de manière à maximiser la valeur présente de son avoir net :

$$MAX \sum_i \left(\frac{rs_i}{TIN} - PK_i\right) IND_i \qquad [124]$$

$$\text{s.c.} \ \sum_i PK_i IND_i \le IT \qquad [125]$$

où

rs_i est le taux de rémunération du capital *i*;

TIN est le taux d'intérêt (qui joue le rôle de taux d'actualisation);

PK_i est le prix (coût de remplacement) du capital *i*;

IND_i est l'investissement en volume de *i* (augmentation du capital *i*);

IT est le budget d'investissement.

On forme le lagrangien :

$$\Lambda = \sum_i \left(\frac{rs_i}{TIN} - PK_i \right) IND_i + \lambda \left(IT - \sum_i PK_i IND_i \right) \qquad [126]$$

Et les conditions de Kuhn et Tucker[13] s'énoncent :

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial IND_i} = \left(\frac{rs_i}{TIN} - PK_i \right) - \lambda PK_i \le 0 \qquad [127]$$

$$IND_i \ge 0 \text{ (contrainte de non-négativité)} \qquad [128]$$

$$IND_i \left[\left(\frac{rs_i}{TIN} - PK_i \right) - \lambda PK_i \right] = 0 \text{ (contrainte d'orthogonalité)} \qquad [129]$$

$$\left(IT - \sum_i PK_i IND_i \right) \ge 0 \qquad [130]$$

$$\lambda \ge 0 \text{ (contrainte de non-négativité)} \qquad [131]$$

$$\lambda \left(IT - \sum_i PK_i IND_i \right) = 0 \text{ (contrainte d'orthogonalité)} \qquad [132]$$

La condition [127] peut se récrire

$$\frac{rs_i}{TIN} - (1+\lambda) PK_i \le 0 \qquad [133]$$

$$\frac{rs_i}{TIN} \le (1+\lambda) PK_i \qquad [134]$$

$$\frac{\left(rs_i / TIN \right)}{PK_i} \le (1+\lambda) \qquad [135]$$

Cette condition ne peut être vérifiée avec l'égalité pour tout i que si tous les rapports $\frac{rs_i}{PK_i}$ sont égaux. Dans le cas contraire, la contrainte d'orthogonalité [129] implique que $IND_i = 0$ pour tout i tel que

$$\frac{\left(rs_i / TIN \right)}{PK_i} < (1+\lambda) \text{ (inégalité stricte)} \qquad [136]$$

---

13 Elles sont préférées ici aux conditions premières de l'optimum, puisque, en général, les conditions premières de l'optimum classique ne peuvent pas être vérifiées simultanément, comme nous allons le voir.

c'est-à-dire que l'investissement est nul dans toute industrie *i* où le rapport $\frac{rs_i}{PK_i}$ est inférieur au maximum observé sur l'ensemble des industries. Il s'ensuit que, si tous les rapports $\frac{rs_i}{PK_i}$ sont différents, le capitaliste investisseur placera la totalité de son épargne *IT* dans une seule possibilité.

Il est à noter que le membre de gauche de [135] est tout à fait analogue au « *q* » de Tobin. Ce dernier en effet est défini comme

$$\frac{\text{Valeur boursière de la firme}}{\text{Coût de remplacement du capital}}$$

Or la valeur boursière de la firme, dans la théorie de l'investissement de Tobin, est la résultante des anticipations des investisseurs quant à la valeur présente de ses profits. L'équivalent dans notre contexte est $\left({rs_i}/{TIN}\right)$, la valeur présente de la rémunération d'une unité du capital. Et, naturellement, PK_i est le coût de remplacement d'une unité du capital.

3.1.2 L'utilité aléatoire et le logit multinomial

Nous présentons ici un modèle avec fonction d'utilité aléatoire qui permet d'assouplir le modèle simplifié développé à la sous-section précédente.

Dénotons

$$v_i = \left(\frac{rs_i}{TIN} - PK_i\right) \qquad [137]$$

Ce v_i est le coefficient de IND_i dans la fonction objectif [124].

Si l'on fait l'hypothèse que tous les investisseurs prévoient que la valeur de v_i pour la période courante *t* se maintiendra à l'avenir (anticipations stationnaires), nous avons vu que tous les investissements seront alloués à l'industrie *i* qui a la valeur v_i la plus élevée.

Comment représenter le comportement des investisseurs comme rationnel sans que cela implique une concentration des investissements dans une seule branche ? Le modèle de l'utilité aléatoire (*random utility*) offre une possibilité. Selon ce modèle de choix discrets, chaque individu choisit rationnellement la possibilité qui comporte pour lui l'utilité maximale. Mais l'utilité d'une possibilité donnée pour un individu donné n'est pas déterministe.

Dans notre contexte, il est raisonnable de croire que les investisseurs ne sont pas parfaitement unanimes dans leurs anticipations. Pour représenter cette dispersion des anticipations, écrivons l'utilité de l'investissement *i* pour l'investisseur *n*

$$U_{in} = \beta_i v_i + \varepsilon_{in} \qquad [138]$$

où :

$v_i = \left(\frac{rs_i}{TIN} - PK_i \right)$ est la valeur présente nette d'un investissement d'une unité de capital dans l'industrie *i* sous l'hypothèse d'anticipations stationnaires;

rs_i est le taux de rémunération du capital *i*;

β_i est le paramètre de sensibilité de l'investisseur aux v_i;

$\beta_i v_i$ est donc la partie systématique de l'utilité; le paramètre β_i est nécessaire pour définir le poids relatif de l'utilité systématique par rapport au terme aléatoire;

ε_{in} est un terme aléatoire.

Puisque la formulation des anticipations individuelles dépend d'une multitude de facteurs, dont un grand nombre sont inobservables, il convient de représenter ces variations au moyen d'un terme aléatoire.

Dans le modèle d'utilité aléatoire, donc, puisque le sujet *n* choisit rationnellement la possibilité qui comporte pour lui l'utilité maximale, la probabilité que le sujet *n* choisisse l'option *i* est égale à la probabilité que cette option ait pour lui une utilité supérieure à celle de toute autre option qui lui soit offerte.

La forme ultime du modèle dépend évidemment des hypothèses que l'on fait quant à la distribution des termes aléatoires ε_{in}. Domencich et McFadden (1975, chap. 4) explorent quelques-unes des possibilités. L'hypothèse qui conduit au modèle logit multinomial est que les termes aléatoires ont une distribution de Gumbel :

$$\text{Prob}[E \leq \varepsilon] = \text{F}(\varepsilon) = \exp\left[- \text{e}^{-\mu(\varepsilon - \eta)}\right] \qquad [139]$$

où $\mu > 0$ est un paramètre d'échelle et η, un paramètre de localisation.

On fait donc l'hypothèse

- que les termes aléatoires sont indépendants et
- qu'ils ont des distributions identiques et

- que ces distributions sont des distributions de Gumbel :
  $E_{in} \sim G(\eta,\mu)$, pour toute combinaison i,n.

Ces hypothèses conduisent au modèle logit multinomial standard :

$$\Pr_n(i) = \frac{\exp(\beta_i v_i)}{\sum_j \exp(\beta_j v_j)} \qquad [140]$$

Avec un grand nombre d'investisseurs n, identiques sauf pour la valeur des termes aléatoires, la probabilité $\Pr_n(i)$ donne la répartition des investissements entre les industries.

À notre connaissance, le modèle logit multinomial n’a pas été appliqué à la distribution de l’investissement entre les industries dans un MÉGC[14]. Parmi les modèles qui sont passés en revue ci-après, il y en a cependant qui présentent une parenté certaine avec le logit multinomial.

3.2 BEGHIN, DESSUS, ROLAND ET MENSBRUGGHE (1996)

Beghin, Dessus, Roland et Mensbrugghe (1996) et Mensbrugghe (2003) ont développé deux versions de leur modèle, l’une statique et l’autre, dynamique séquentielle.

*3.2.1 Modèle statique à une seule génération de capital (*single vintage framework*)*

Cette version du modèle est statique, et non pas dynamique séquentielle. Nous en donnons néanmoins un compte rendu, parce que la façon dont y est modélisée la répartition du capital entre les industries pourrait également s'appliquer à la répartition des investissements de chaque période dans un modèle dynamique séquentiel. Notons qu’on peut utiliser une spécification similaire pour représenter la mobilité du capital dans le modèle statique (Decaluwé et al., 2005).

Dans cette version du modèle, la mobilité du capital entre les industries est représentée par une fonction CET :

$$K^S = \left[\sum_i \left(\gamma_i^k\right)^{\omega^K} \left(KS_i\right)^{\frac{1+\omega^K}{\omega^K}} \right]^{\frac{\omega^K}{1+\omega^K}} \qquad [141]$$

---

14 Mais selon Thissen (1999), Easterly (1990) emploie un modèle logit multinomial pour l’allocation de portefeuille de l’épargne des ménages.

où

K^S est l'offre totale de capital;

KS_i est l'offre de capital à l'industrie *i*;

ω^K est l'élasticité de transformation du capital;

γ_i^k est un paramètre de part.

Les détenteurs du capital maximisent leur revenu total

$\sum_i R_i KS_i$, sous contrainte de la CET

où

R_i est le taux de rémunération du capital dans l'industrie *i*[15].

L'offre de capital à l'industrie *i* est alors donnée par

$$KS_i^s = \gamma_i^k \left(\frac{R_i}{TR} \right)^{\omega^K} K^s \text{ si } 0 \leq \omega^K < \infty \qquad [142]$$

où

TR est le le taux de rémunération agrégé du capital.

Si l'élasticité est infinie, l'offre est infiniment élastique au taux de rémunération global *TR*

$$R_i = TR \text{ si } \omega^K = \infty \qquad [143]$$

La fonction duale de la fonction de transformation est la fonction d'agrégation des taux de rémunération

$$TR = \left[\sum_i \gamma_i^k \left(R_i \right)^{1+\omega^K} \right]^{\frac{1}{1+\omega^K}} \text{ si } 0 \leq \omega^K < \infty \qquad [144]$$

Si l'élasticité de transformation est infinie, cette équation est remplacée par la contrainte

$$\sum_i K_i^d = K^s \text{ si } \omega^K = \infty \qquad [145]$$

15 L'expression « taux de rémunération » est préférable à « taux de rendement », parce que cette dernière réfère au rapport de la rémunération reçue sur le montant investi; ici, il s'agit plutôt du revenu versé au détenteur par unité de capital utilisée.

*3.2.2 Modèle à plusieurs générations de capital (*multiple vintage framework*)*

Dans le modèle à générations de capital de Beghin, Dessus, Roland et Mensbrugghe (1996) et de Mensbrugghe (2003), il n'y a pas, à proprement parler, de demande d'*investissement*. Il n'y a qu'une demande et une offre de *capital*, avec mobilité parfaite pour le capital nouveau et partielle pour le capital ancien. Et l'offre agrégée de capital est indépendante de la rémunération du capital. Car l'ancien capital est hérité de la période précédente; quant au nouveau capital, il est simplement le rapport de l'épargne de la période précédente sur le prix agrégé de l'investissement à cette même période, alors que l'épargne étrangère est exogène et que l'épargne des ménages est une fraction constante du revenu supernuméraire.

On se réfère ici à la version simplifiée du modèle dynamique présentée par Mensbrugghe (2003)[16]. À chaque période, l'offre de capital au niveau agrégé est constituée du capital hérité de la période précédente, ajusté pour la dépréciation, et de nouveau capital. Ce dernier est l'investissement de la période précédente. Mais le nouveau capital n'a pas été réparti à la période précédente entre les industries; cette répartition se fait à la période *courante* : le nouveau capital créé à la période précédente est parfaitement mobile entre les industries à la période courante. Il y a une demande de capital distincte pour l'ancien et le nouveau capital, par industrie; la demande de capital est dérivée des fonctions de production. Le taux de rémunération du capital est endogène, unique pour l'ensemble des industries, *sauf* pour les industries en recul, c'est-à-dire celles dont la demande ne dépasse pas la capacité installée de la période précédente. Les industries en recul relâchent du capital; le capital retenu dans une industrie en recul est une fonction à élasticité constante du rapport

$$\frac{R_{i,t}^{old} \big/ R_{i,t}^{new}}{R_{i,t-1}^{old} \big/ R_{i,t-1}^{new}} \qquad [146]$$

où $R_{i,t}^{old}$ est le taux de rémunération du vieux capital à la période t dans l'industrie i et $R_{i,t}^{new}$ est le taux de rémunération du nouveau capital à la période t dans l'industrie i.

Le capital ancien relâché par les industries en recul s'ajoute au capital nouveau, auquel il s'assimile. Il y a donc là une forme de mobilité partielle du capital ancien.

On voit que, comme nous l'avions annoncé, il n'y a pas de demande d'*investissement* dans ce modèle. Il n'y a qu'une demande et une offre de *capital*, avec mobilité parfaite pour le capital nouveau et partielle pour le capital ancien. Et l'offre agrégée de capital est indépendante de la rémunération du capital. Ce qui fait que ce modèle ne comporte pas de demande d'investissement, c'est l'absence de délai d'installation. On peut imaginer un modèle comportant à la fois un délai d'installation du nouveau capital et une technologie à générations de capital. Mais il faudrait alors trouver ailleurs que dans le modèle de Beghin *et al*. l'inspiration pour la spécification de l'investissement par industrie.

3.3 LE MODÈLE *MIRAGE* DE BCHIR, DECREUX, GUÉRIN ET JEAN (2002)

La fonction de répartition des investissements du modèle *MIRAGE* de Bchir, Decreux, Guérin et Jean (2002) appartient à la famille des modèles gravitaires, largement utilisés en sciences régionales et en géographie quantitative. Nous allons donc présenter le modèle gravitaire avant d'examiner le modèle *MIRAGE* lui-même.

3.3.1 Le modèle gravitaire

3.3.1.1 Énoncé du modèle

La loi de la gravité de Newton est donnée par

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2} \qquad [147]$$

où

F est la force d'attraction de la gravité

m_1 et m_2 sont les masses respectives de deux corps

d est la distance qui les sépare

G est la constante de gravitation[17]

Par analogie avec la physique mécanique, on a proposé pour les flux origine-destination le modèle suivant[18]

---

16 Dans la version simplifiée de Mensbrugghe (2003), il n'y a pas de gouvernement ni d'épargne des entreprises. Mais même dans la version plus élaborée de Beghin *et al*. (1996), l'offre agrégée de capital demeure indépendante de la rémunération du capital.

17 La constante de gravitation est égale à 6,67259 × 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}.

18 Voir entre autres la présentation qu'en fait Wilson (1970b, p. 15 et suivantes).

$$N_{od} = \frac{G_{od}\, O_o\, D_d}{f(d_{od})} \qquad [148]$$

où

N_{od} est le flux de l'origine *o* vers la destination *d*

O_o est l'offre en *o*

D_d est la demande en *d*

d_{od} est la distance qui sépare origine *o* de la destination *d*

$f(d_{od})$ est la friction de la distance

G_{od} est une constante de calibrage

Ce modèle se distingue formellement de la Loi de Newton en ce que la constante G_{od} est spécifique à chaque paire origine-destination. Cela est imposé par les contraintes d'équilibre

$$\sum_o N_{od} = D_d \sum_o \frac{G_{od}\, O_o}{f(d_{od})} = D_d \text{ pour toute destination } d \qquad [149]$$

$$\sum_d N_{od} = O_o \sum_d \frac{G_{od}\, D_d}{f(d_{od})} = O_o \text{ pour toute origine } o \qquad [150]$$

3.3.1.2 Application aux investissements par destination

Nous allons examiner cette formulation dans le contexte d'un modèle à une seule origine. Concrètement, cela pourrait correspondre à un modèle d'un seul pays ou région, ou encore à un modèle à plusieurs pays ou régions où l'épargne est consolidée, comme l'épargne du Québec et du Reste-du-Canada dans le modèle d'équilibre général du Ministère des Finances du Québec (MÉGFQ) (Decaluwé et al., 2005). Cela est contraire au modèle *MIRAGE*, où sont représentés les flux d'investissement transfrontaliers.

Néanmoins, concentrons-nous pour le moment sur le cas d'une origine unique. Si l'on transpose le modèle gravitaire, on obtient pour les dépenses d'investissement par destination une relation de la forme

$$PK_{k.i.rg,t} IND_{k,i,rg,t} = \frac{G_{k,i,rg,t}\, D_{k,i,rg,t}}{f(d_{k,i,rg,t})} \qquad [151]$$

où

$PK_{k,i,rg,t}$ est le prix de remplacement du capital de type *k* dans l'industrie *i* de la région *rg* au temps *t*;

$IND_{k,i,rg,t}$ est l'investissement en capital de type *k* dans l'industrie *i* de la région *rg* au temps *t*;

$G_{k,i,rg,t}$ est une variable d'équilibrage.

La variable d'équilibrage $G_{k,i,rg,t}$ doit respecter la contrainte d'équilibre

$$\sum_k \sum_i \sum_{rg} PK_{k,i,rg,t} IND_{k,i,rg,t} = \sum_k \sum_i \sum_{rg} \frac{G_{k,i,rg,t} D_{k,i,rg,t}}{f(d_{k,i,rg,t})} = IT_t \quad [152]$$

où IT_t est l'investissement total à la période *t*.

Nous reviendrons plus loin sur la variable d'équilibrage $G_{k,i,rg,t}$. Mais qu'est-ce qui, dans un MEGC, correspondrait à $D_{k,i,rg,t}$ et à $f(d_{k,i,rg,t})$?

Rappelons-nous que, dans le modèle gravitaire, la « demande » D_d représente, non pas une demande à satisfaire, mais plutôt la « force d'attraction » d'une destination, le marché potentiel. Par analogie, cela pourrait correspondre, dans un MEGC, à la capacité installée, ou au stock de capital, évalué au coût de remplacement : $PK_{k,i,rg,t}$ $KS_{k,i,rg,t}$. Quant à la « friction de la distance », il serait logique qu'elle soit une fonction inverse du taux de rémunération du capital $rs_{k,i,rg,t}$; prenons, par exemple

$$f(d_{k,i,rg,t}) = e^{-\alpha\, rs_{k,i,rg,t}} \text{, où } \alpha \text{ est un paramètre libre.} \quad [153]$$

Le modèle devient donc

$$PK_{k,i,rg,t} IND_{k,i,rg,t} = G_{k,i,rg,t}\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}}\, PK_{k,i,rg,t}\, KS_{k,i,rg,t} \quad [154]$$

avec la contrainte

$$\sum_k \sum_i \sum_{rg} PK_{k,i,rg,t}\, IND_{k,i,rg,t} = \sum_k \sum_i \sum_{rg} \left(G_{k,i,rg,t}\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}}\, PK_{k,i,rg,t}\, KS_{k,i,rg,t} \right) = IT_t \quad [155]$$

où

$KS_{k,i,rg,t}$ est le stock de capital de type *k* dans l'industrie *i* de la région *rg* au temps *t*;

$rs_{k,i,rg,t}$ est le taux de rémunération reçu par les détenteurs du capital de type *k* dans l'industrie *i* de la région *rg* au temps *t*;

La contrainte d'équilibre sera respectée si

$$G_{k,i,rg,t} = \frac{A_{k,i,rg}\, IT_t}{\sum_{kj}\sum_{j}\sum_{rgj}\left(e^{\alpha\, rs_{kj,j,rgj,t}}\, A_{kj,j,rgj}\, PK_{kj,j,rgj,t}\, KS_{kj,j,rgj,t}\right)} \qquad [156]$$

où les $A_{k,i,rg}$ sont des constantes calibrées (elles sont constantes dans le temps, au contraire des $G_{k,i,rg,t}$).

Pour que le modèle reproduise les observations de l'année initiale, il faut aussi que, pour t = 0, la variable d'équilibrage $G_{k,i,rg,t}$ respecte

$$PK_{k,i,rg,0}\, IND_{k,i,rg,0} = G_{k,i,rg,0}\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,0}}\, PK_{k,i,rg,0}\, KS_{k,i,rg,0} \qquad [157]$$

c'est-à-dire

$$PK_{k,i,rg,0}\, IND_{k,i,rg,0} = \frac{A_{k,i,rg}\, IT_0\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,0}}\, PK_{k,i,rg,0}\, KS_{k,i,rg,0}}{\sum_{kj}\sum_{j}\sum_{rgj}\left(e^{\alpha\, rs_{kj,j,rgj,0}}\, A_{kj,j,rgj,0}\, PK_{kj,j,rgj,0} PK_{kj,0}\, KS_{kj,j,rgj,0}\right)} \qquad [158]$$

où les $A_{k,i,rg}$ sont définis à un facteur de proportionalité près. En effet,

$$\begin{aligned} &\frac{A_{k,i,rg}\, IT_0\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,0}}\, PK_{k,i,rg,0}\, KS_{k,i,rg,0}}{\sum_{kj}\sum_{j}\sum_{rgj}\left(e^{\alpha\, rs_{kj,j,rgj,0}}\, A_{kj,j,rgj,0}\, PK_{kj,j,rgj,0}\, KS_{kj,j,rgj,0}\right)} \\ &\quad = \frac{\lambda A_{k,i,rg}\, IT_0\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,0}}\, PK_{k,i,rg,0}\, KS_{k,i,rg,0}}{\lambda \sum_{kj}\sum_{j}\sum_{rgj}\left(e^{\alpha\, rs_{kj,j,rgj,0}}\, A_{kj,j,rgj,0}\, PK_{kj,j,rgj,0}\, KS_{kj,j,rgj,0}\right)} \\ &\quad = \frac{\lambda A_{k,i,rg}\, IT_0\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,0}}\, PK_{k,i,rg,0}\, KS_{k,i,rg,0}}{\sum_{kj}\sum_{j}\sum_{rgj}\left(e^{\alpha\, rs_{kj,j,rgj,0}}\, \lambda A_{kj,j,rgj,0}\, PK_{kj,j,rgj,0}\, KS_{kj,j,rgj,0}\right)} \end{aligned} \qquad [159]$$

On peut donc fixer λ de telle manière que

$$\sum_{kj}\sum_{j}\sum_{rgj}\left(e^{\alpha\, rs_{kj,j,rgj,0}}\, \lambda A_{kj,j,rgj,0}\, PK_{kj,j,rgj,0}\, KS_{kj,j,rgj,0}\right) = 1 \qquad [160]$$

L'équation [158] revient alors à

$$PK_{k,i,rg,0}\, IND_{k,i,rg,0} = A_{k,i,rg}\, IT_0\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,0}}\, PK_{k,i,rg,0}\, KS_{k,i,rg,0} \qquad [161]$$

Il s'ensuit

$$A_{k,i,rg} = \frac{PK_{k,i,rg,0}\, IND_{k,i,rg,0}}{IT_0\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,0}}\, PK_{k,i,rg,0}\, KS_{k,i,rg,0}} \qquad [162]$$

$$A_{k,i,rg} = \frac{IND_{k,i,rg,0}}{IT_0\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,0}}\, KS_{k,i,rg,0}} \qquad [163]$$

Ainsi les $A_{k,i,rg}$ sont calibrés. Ensuite, on substitue [156] dans [154] et on obtient

$$PK_{k,i,rg,t} IND_{k,i,rg,t} = \frac{A_{k,i,rg}\, IT_t\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}}\, PK_{k,i,rg,t}\, KS_{k,i,rg,t}}{\sum_{kj}\sum_{j}\sum_{rgj}\left(e^{\alpha\, rs_{kj,j,rgj,t}}\, A_{kj,j,rgj,t}\, PK_{kj,j,rgj,t}\, KS_{kj,j,rgj,t}\right)} \qquad [164]$$

$$IND_{k,i,rg,t} = \frac{A_{k,i,rg}\, IT_t\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}}\, KS_{k,i,rg,t}}{\sum_{kj}\sum_{j}\sum_{rgj}\left(e^{\alpha\, rs_{kj,j,rgj,t}}\, A_{kj,j,rgj,t}\, PK_{kj,j,rgj,t}\, KS_{kj,j,rgj,t}\right)} \qquad [165]$$

$$\frac{IND_{k,i,rg,t}}{IT_t} = \frac{A_{k,i,rg}\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}}\, KS_{k,i,rg,t}}{\sum_{kj}\sum_{j}\sum_{rgj}\left(e^{\alpha\, rs_{kj,j,rgj,t}}\, A_{kj,j,rgj,t}\, PK_{kj,j,rgj,t}\, KS_{kj,j,rgj,t}\right)} \qquad [166]$$

Nous allons voir que cette forme du modèle gravitaire est en tout point conforme à la fonction de répartition des investissements du modèle *MIRAGE* de Bchir *et al.* (2002). Mais, il faut reconnaître que nous n'avons pas encore donné à cette spécification un fondement théorique très solide : elle est plutôt dérivée d'une analogie intuitive. Nous verrons cependant à la fin de 3.3.2 que l'on peut rapprocher ce modèle gravitaire du modèle logit multinomial développé en 3.1.2.

3.3.2 Le modèle **MIRAGE** *de Bchir, Decreux, Guérin et Jean (2002)*

La fonction de répartition des investissements de Bchir, Decreux, Guérin et Jean (2002, p.119) est donnée par

$$\frac{PK_s I_{irs}}{S_r} = \frac{A_{irs} PK_s K_{irs} e^{\alpha\, wk_{is}}}{\sum_{j,z} A_{jrz} PK_z K_{jrz} e^{\alpha\, wk_{jz}}} \qquad [167]$$

où

PK_s est le prix du bien d'investissement dans le pays de destination s[19];

I_{irs} est le flux d'investissement en provenance du pays r vers l'industrie i du pays s;

S_r est la dépense d'investissement totale du pays r;

A_{irs} est un paramètre calibré;

K_{irs} est le stock de capital de l'industrie i du pays s possédé par le pays r;

wk_{is} est le taux de rendement du capital de l'industrie i du pays s.

Dans le code GAMS du modèle *MIRAGE*, la fonction d'investissement est sous la forme

$$I_{irs} = B_r A_{irs} K_{irs} e^{\alpha\, wk_{is}} \qquad [167.1]$$

où la variable B_r est déterminée par la contrainte du budget d'investissement

$$\sum_{i,s} PK_s I_{irs} = S_r \qquad [167.2]$$

La contrainte du budget d'investissement implique

$$\sum_{i,s} PK_s I_{irs} = \sum_{i,s} PK_s B_r A_{irs} K_{irs} e^{\alpha\, wk_{is}} = S_r \qquad [167.3]$$

$$B_r = \frac{S_r}{\sum_{i,s} PK_s A_{irs} K_{irs} e^{\alpha\, wk_{is}}} \text{, ou, de façon équivalente, } B_r = \frac{S_r}{\sum_{j,z} A_{jrz} PK_z K_{jrz} e^{\alpha\, wk_{jz}}} \qquad [167.4$$

Il s'ensuit, étant donné [167.1],

$$I_{irs} = S_r \frac{A_{irs} K_{irs} e^{\alpha\, wk_{is}}}{\sum_{j,z} A_{jrz} PK_z K_{jrz} e^{\alpha\, wk_{jz}}} \qquad [167.5]$$

$$I_{irs} = \frac{S_r}{PK_s} \frac{A_{irs} PK_s K_{irs} e^{\alpha\, wk_{is}}}{\sum_{j,z} A_{jrz} PK_z K_{jrz} e^{\alpha\, wk_{jz}}} \qquad [167.6]$$

ce qui est équivalent à [167].

Transposée à la situation d'une origine unique et selon la notation de [155], l'équation [167] devient

---

19 Dans MIRAGE, le prix du bien d'investissement ne varie qu'en fonction des pays de destination.

$$\frac{PK_{k,i,rg,t} IND_{k,i,rg,t}}{IT_t} = \frac{A_{k,i,rg} PK_{k,i,rg,t} KS_{k,i,rg,t} e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}}}{\sum_{kj}\sum_{j}\sum_{rgj} A_{kj,j,rgj} PK_{kj,j,rgj,t} KS_{kj,j,rgj,t}\; e^{\alpha\, rs_{kj,j,rgj,t}}} \qquad [168]$$

ou bien

$$\frac{IND_{k,i,rg,t}}{IT_t} = \frac{A_{k,i,rg} KS_{k,i,rg,t} e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}}}{\sum_{kj}\sum_{j}\sum_{rgj} A_{kj,j,rgj} PK_{kj,j,rgj,t} KS_{kj,j,rgj,t}\; e^{\alpha\, rs_{kj,j,rgj,t}}} \qquad [169]$$

où $A_{k,i,rg}$ est un paramètre calibré et α un paramètre libre. On reconnaît bien là le modèle gravitaire de l'équation [166].

On note que, en l'absence d'écarts entre les taux de rémunération (ou, ce qui revient au même, pour $\alpha = 0$), on a

$$\frac{PK_{k,t} IND_{k,i,rg,t}}{IT_t} = \frac{A_{k,i,rg} PK_{k,t} KS_{k,i,rg,t}}{\sum_{kj}\sum_{j}\sum_{rgj} A_{kj,j,rgj} PK_{kj,j,rgj,t} KS_{kj,j,rgj,t}} \qquad [170]$$

Les auteurs récrivent le modèle sous la forme (équation 3 dans leur texte) :

$$IND_{k,i,rg,t} = B_t A_{k,i,rg} KS_{k,i,rg,t} e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}} \qquad [171]$$

$$\sum_{k}\sum_{i}\sum_{rg} PK_{k,t} IND_{k,i,rg,t} = IT_t \qquad [172]$$

Ils définissent

$$R_t = \frac{1}{\alpha} \ln\left[\sum_{k}\sum_{i}\sum_{rg}\left(\frac{A_{k,i,rg} PK_{k,i,rg,t} KS_{k,i,rg,t}}{\sum_{kj}\sum_{j}\sum_{rgj} A_{kj,j,rgj} PK_{kj,j,rgj,t} KS_{kj,j,rgj,t}} e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}}\right)\right] \qquad [173]$$

ou plutôt

$$e^{\alpha R_t} = \sum_{k}\sum_{i}\sum_{rg}\left(\frac{A_{k,i,rg} PK_{k,i,rg,t} KS_{k,i,rg,t}}{\sum_{kj}\sum_{j}\sum_{rgj} A_{kj,j,rgj} PK_{kj,j,rgj,t} KS_{kj,j,rgj,t}} e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}}\right) \qquad [174]$$

où le membre de droite est une somme pondérée des $e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}}$, les poids étant égaux aux parts, données par [170], qui prévaudraient en l'absence d'écarts entre les taux de rémunération (ou, ce qui revient au même, pour $\alpha = 0$). On a donc

$$e^{\alpha R_t} \sum_{kj} \sum_{j} \sum_{rgj} A_{kj,j,rgj} PK_{kj,j,rgj,t} KS_{kj,j,rgj,t} = \sum_{k} \sum_{i} \sum_{rg} A_{k,i,rg} PK_{k,i,rg,t} KS_{k,i,rg,t} e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}} \qquad [175]$$

et on peut récrire l'équation de répartition des investissements

$$\frac{PK_{k,i,rg,t} IND_{k,i,rg,t}}{IT_t} = \frac{A_{k,i,rg} PK_{k,i,rg,t} KS_{k,i,rg,t} e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}}}{e^{\alpha R_t} \sum_{kj} \sum_{j} \sum_{rgj} A_{kj,j,rgj} PK_{kj,j,rgj,t} KS_{kj,j,rgj,t}} \qquad [176]$$

$$\frac{PK_{k,i,rg,t} IND_{k,i,rg,t}}{IT_t} = \frac{A_{k,i,rg} PK_{k,i,rg,t} KS_{k,i,rg,t}}{\sum_{kj} \sum_{j} \sum_{rgj} A_{kj,j,rgj} PK_{kj,j,rgj,t} KS_{kj,j,rgj,t}} e^{\alpha (rs_{k,i,rg,t} - R_t)} \qquad [177]$$

Bchir *et al.* interprètent R_t comme « un coût d'opportunité (taux de dépréciation et prime de risque inclus) du capital [...] » (p. 120). La dynamique des investissements tend à l'égalisation des taux de rémunération et la rapidité de la convergence dépend de l'élasticité α.

La variable B_t peut maintenant s'écrire

$$B_t = \frac{e^{-\alpha R_t}\; IT_t}{\sum_{kj} \sum_{j} \sum_{rgj} A_{kj,j,rgj} PK_{kj,j,rgj,t} KS_{kj,j,rgj,t}} \qquad [178]$$

Malheureusement, Bchir *et al.* ne donnent de cette formulation qu'une justification sommaire. Ils écrivent :

> « D'un point de vue théorique, la modélisation des IDE [investissements directs à l'étranger] dans MIRAGE doit être compatible avec celle utilisée pour l'investissement national, et elle doit être cohérente avec un comportement rationnel des investisseurs dans l'affectation de leur épargne. Le taux de rémunération du capital est dans ce contexte un déterminant naturel de la répartition entre secteurs et entre pays. En revanche, ce taux de rémunération incorpore l'influence de plusieurs déterminants des IDE identifiés dans la littérature empirique, [...] comme la taille du marché, son taux de croissance ou le potentiel marchand. Il serait donc incohérent de prendre en compte ces déterminants en plus du taux de rémunération sectoriel du capital. Enfin, les études empiriques montrent que l'élasticité de l'investissement à la rémunération du capital est finie.
>
> Sur la base de ces différents éléments, une formulation unique de détermination de l'investissement est utilisée, qu'il soit domestique ou étranger. Elle procède d'une allocation de l'épargne des agents entre les différents secteurs des différentes zones, en fonction de la

structure initiale de leur épargne, du stock de capital courant et du taux de rendement sectoriel sur le capital, avec une élasticité α ».

On peut en déduire qu'aux yeux des auteurs, les paramètres calibrés $A_{k,i,rg}$ représentent « la structure initiale de leur épargne », c'est-à-dire la répartition initiale du stock de capital; cela est assez juste, comme nous l'avons vu en 2.2. Et évidemment, $KS_{k,i,rg,t}$ est « le stock de capital courant ».

Or, si, comme nous l'avons vu, le modèle est une forme du modèle gravitaire, il peut aussi être interprété comme un modèle logit multinomial. En l'occurrence, la fonction d'utilité systématique qui conduit au modèle *MIRAGE* est

$$v_{k,i,rg,t} = \ln(A_{k,i,rg} PK_{k,i,rg,t} KS_{k,i,rg,t}) + \alpha\, rs_{k,i,rg,t} \qquad [179]$$

On peut le vérifier en substituant [179] dans [140]. L'intérêt de voir ce modèle comme un logit multinomial est que cela fait ressortir la nature *ad hoc* du premier terme de la fonction d'utilité, qui en constitue la partie « inertielle ».

3.4 Abbink, Braber et Cohen (1995)

Abbink, Braber et Cohen (1995), présentent un MÉGC séquentiel pour l’Indonésie où les parts des investissements par destination sont déterminées en fonction du rapport de la rentabilité sectorielle sur la rentabilité moyenne. Les secteurs où les investissements sont plus rentables voient croître leur part de l’investissement total dans les périodes futures. Ces parts sectorielles (endogènes) sont définies comme suit :

$$\theta_{it} = \frac{\theta_{i0}\left(\dfrac{PR_{it}}{APR_t}\right)}{\sum_j \theta_{i0}\left(\dfrac{PR_{jt}}{APR_t}\right)} \qquad [180]$$

avec

θ_{i0} : parts des investissements sectoriels à l’année de référence ;

PR_{it} : taux de profit sectoriels ;

APR_t : taux de profit moyen.

Les parts initiales sont supposées égales aux parts sectorielles de la rémunération du capital :

$$\theta_{i0} = \frac{R_{i0} KD_{i0}}{\sum_j R_{j0} KD_{j0}} \qquad [181]$$

où R_{i0} et KD_{i0} représentent le taux de rémunération et le stock de capital à l'année de référence.

Les taux de profit sectoriels sont déterminés à l'aide de l'expression suivante :

$$PR_{it} = \frac{R_{it} KD_{it} - \delta KD_{it} PK_t}{KD_{it} PK_t} \quad [182]$$

où δ est le taux de dépréciation et PK_t est le prix de remplacement du capital. Cette équation représente la rentabilité des investissements passés, qui est différente du rendement marginal du capital. Le numérateur est égal à la différence entre :

- l'excédent brut d'exploitation (EBE), qui est le produit du taux de rémunération par le volume de capital, et
- la dépréciation.

Au dénominateur nous avons la valeur du stock de capital. Le taux de profit moyen est calculé comme étant la moyenne des taux profit pondérés par les parts sectorielles des capitaux investis :

$$APR_t = \sum_i \left(\frac{KD_{it} PK_t}{\sum_j KD_{jt} PK_t} PR_{it} \right) \quad [183]$$

ce qui, étant donné que le prix du capital PK_t est le même pour toutes les industries, est strictement équivalent à

$$APR_t = \sum_i \left(\frac{KD_{it}}{\sum_j KD_{jt}} PR_{it} \right) \quad [184]$$

Enfin, l'accumulation du capital prend la forme standard :

$$KD_{i,t+1} = (1-\delta) KD_{it} + \theta_{it} IT_t \quad [185]$$

où IT_t désigne l'investissement total en volume. Le second terme du membre à droite de cette équation représente les investissements par secteur de destination.

3.5 THURLOW (2003) ET DERVIS, DE MELO ET ROBINSON (1982)

De manière analogue Thurlow (2003), dans son modèle appliqué à l'Afrique du Sud, détermine les parts distributives des investissements par destination à l'aide de l'expression suivante :

$$\eta_{it} = \left(\frac{KD_{it}}{\sum_j KD_{jt}} \right) \left[\beta_i \left(\frac{R_{it}}{RM_t} - 1 \right) + 1 \right] \qquad [186]$$

où

η_{it} est la part de l'investissement dirigé vers l'industrie *i* à la période *t*;

KD_{it} est la quantité de capital de l'industrie *i* à la période *t*;

β_i est un paramètre;

R_{it} désigne le taux de rémunération ;

RM_t, le taux de rémunération moyen, défini comme suit :

$$RM_t = \sum_i \left(\frac{KD_{it}}{\sum_j KD_{jt}} R_{it} \right) \qquad [187]$$

Cette équation est de même forme que celle d'APR_t chez Abbink *et al.* (1995). Mais là, PR_{it} désigne le taux de rendement du capital investi (taux de profit : rapport de la rémunération du capital sur la valeur du capital investi), alors qu'ici, R_{it} désigne le taux de rémunération du capital (loyer du capital : rapport de la rémunération sur la quantité de capital, c'est-à-dire rémunération par unité de capital).

La part des investissements qui est dirigée vers un secteur est supérieure ou inférieure à sa part du capital existant, selon que son taux de rémunération du capital est supérieur ou inférieur au taux moyen. Le paramètre β_i traduit la sensibilité des investissements aux différences de taux de rémunération. On peut le voir plus clairement en récrivant l'équation des parts sous la forme

$$\eta_{it} = \left(\frac{KD_{it}}{\sum_j KD_{jt}} \right) \left[\beta_i \left(\frac{R_{it}}{RM_t} \right) + (1 - \beta_i) \right] \qquad [188]$$

$$\eta_{it} = (1 - \beta_i) \left(\frac{KD_{it}}{\sum_j KD_{jt}} \right) + \beta_i \left(\frac{R_{it}}{RM_t} \right) \left(\frac{KD_{it}}{\sum_j KD_{jt}} \right) \qquad [189]$$

Une fraction β_i des investissements est répartie en fonction du rapport des taux de rémunération, tandis que le reste est réparti selon les parts sectorielles du capital existant. Dans le cas extrême où β_i est égal à zéro (pas de mobilité) les parts sectorielles des nouveaux investissements sont constantes, égales aux parts sectorielles du capital.

Si le paramètre β_i est égal à 1, l'équation des parts distributives des investissements par destination revient à

$$\eta_{it} = \left(\frac{KD_{it}}{\sum_j KD_{jt}} \right) \left(\frac{R_{it}}{RM_t} \right) \qquad [190]$$

$$\begin{bmatrix} \text{Part des nouveaux} \\ \text{investissements} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Part du capital} \\ \text{existant} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \text{Rapport du taux de rémunération sectoriel} \\ \text{sur le taux de rémunération moyen} \end{bmatrix}$$

La valeur totale des investissements est la somme des produits des investissements par origine INV_{it} par les prix composites correspondants PC_{it}. Le volume total des investissements est le rapport de la valeur des investissements sur le prix de remplacement du capital. L'investissement par destination sectorielle, IND_{it}, est alors simplement égal au produit de la part du secteur par le volume total des investissements :

$$IND_{it} = \eta_{it} \left(\frac{\sum_j PC_{jt} INV_{jt}}{PK_t} \right) \qquad [191]$$

où

PC_{jt} est le prix du bien *j* à la période *t*;

INV_{jt} est la quantité demandée du bien *j* pour fins d'investissement;

la somme $\sum_j PC_{jt} INV_{jt}$ est la dépense totale d'investissement;

PK_t est le prix de remplacement du capital à la période *t*.

L'indice de prix PK_t est égal à

$$PK_t = \frac{\sum_j PC_{jt} INV_{jt}}{\sum_j INV_{jt}} \qquad [192]$$

Enfin, l'équation d'accumulation du capital s'écrit :

$$KD_{i,t+1} = KD_{it}\left(1 + \frac{IND_{it}}{KD_{it}} - \delta\right) \quad [193]$$

ou encore

$$KD_{i,t+1} = (1-\delta)KD_{it} + IND_{it} \quad [194]$$

La spécification de Thurlow (2003) est inspirée de l'équation dynamique des parts distributives des investissements proposée par Dervis, de Melo et Robinson (1982) :

$$H_{i,t+1} = SP_{it} + \mu\, SP_{it}\left(\frac{R_{it} - AR_t}{AR_t}\right) \quad [195]$$

où

$$SP_{it} = \frac{R_{it}KD_{it}}{\sum_j R_{jt}KD_{jt}} \text{ : parts sectorielles des profits;} \quad [196]$$

μ : paramètre de mobilité des fonds d'investissement;

R_{it} : taux de rémunération sectoriel;

AR_t : taux de rémunération moyen.

Cette équation peut être réécrite comme suit:

$$H_{i,t+1} = SP_{it}\left[\mu\left(\frac{R_{it}}{AR_t} - 1\right) + 1\right] \quad [197]$$

Cette dernière expression a la même forme que celle utilisée par Thurlow (2003), mais ici, SP_{it} est la part sectorielle de la rémunération du capital, et non pas la part du capital existant.

3.6 Dumont et Mesplé-Somps (2000)

Le modèle de Dumont et Mesplé-Somps (2000) est parfaitement mécanique : l'investissement total est réparti entre les industries de destinations en parts fixes.

$$K_{i,t+1} = (1-dep)K_{i,t} + \theta_i\, IT_t \quad [198]$$

Il faut noter que l'intérêt de ce modèle était plutôt dans la spécification de l'investissement privé total IT_t, qui rend explicite l'effet de l'investissement public sur l'investissement privé. Mais notre propos ici est d'examiner les modèles d'investissement par industrie de destination.

4. Synthèse de la théorie et des applications recensées

4.1 Résumé des choix qui s'offrent

En prenant appui sur la théorie néoclassique de la demande d'investissement (Nickell, 1978), nous avons développé le modèle de la demande dynamique d'investissement en temps discret avec coûts d'ajustement.

Sous l'hypothèse

- que les coûts d'ajustement sont indépendants du stock de capital, de la forme :

$$C(I_t) = q_t \frac{\gamma}{2} I_t^2 \qquad [062]$$

où q_t est le prix de remplacement du capital, c'est-à-dire le prix du bien d'investissement, à la période t

- que les anticipations sont stationnaires :

$$\tilde{R}_{t+s} = R_t, \forall s \geq 0 \qquad [054]$$

où $R_t = p_t \dfrac{\partial F}{\partial K_t}$ [052]

on obtient la fonction de demande d'investissements

$$I_t = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{R_t}{\bar{u}_t} - 1\right) \qquad [111]$$

où $\bar{u}_t = (r + \delta) q_t$ [056]

C'est l'équivalent de la fonction de demande d'investissements théorique de Bourguignon *et al.* (1989) :

$$I_t = a\left\{\frac{p^n MP_k U}{q(\delta + J^F)} - 1\right\} = a\left\{\frac{B}{C} - 1\right\} \geq 0 \qquad [112]$$

à ceci près que cette dernière tient compte du taux d'utilisation du capital *U*.

Ces auteurs écartent cependant cette spécification, parce qu'elle conduit à des fluctuations extrêmes dans leur modèle. Ils lui substituent la fonction quadratique *ad hoc* :

$$\frac{I_t}{K_t} = q\gamma_1\left[\left(\frac{B}{C}\right)^2 + \gamma_2\left(\frac{B}{C}\right)\right] \qquad [113]$$

Nous avons également relevé l'équation d'investissement par destination *i* de Jung et Thorbecke (2001) :

$$\frac{INV_{it}}{K_{it}} = A_i \left(\frac{KINC_{it}}{PK_{it}\, K_{it}\, r_t} \right)^{\beta_i} \qquad [115]$$

et celle de Fargeix et Sadoulet (1994) :

$$\frac{I_{it}}{K_{it}} = B_i \left(\frac{KINC_{it}\,(1+\pi_t)}{PK_{it}\, K_{it}\,(1+rd_t)} \right)^{\varepsilon_i} \qquad [120]$$

Aucun de ces deux modèles ne tient compte de la dépréciation; le modèle de Jung et Thorbecke peut cependant être amendé en ce sens.

Nous avons montré comment on peut rattacher ces deux formulations au « *q* » de Tobin. Dans le premier cas, le taux d'investissement est une fonction à élasticité constante d'une version du « *q* ». Dans le second cas, le « *q* » est remplacé par une valeur apparentée : le rapport $\frac{KINC_{it}\,(1+\pi_t)}{1+rd_t}$ est la valeur présente au temps *t* d'un revenu de $KINC_{it}\,(1+\pi_t)$ reçu à la période *t*+1, actualisé au taux rd_t. On pourrait appeler le rapport $\left(\frac{KINC_{it}\,(1+\pi_t)}{PK_{it}\, K_{it}\,(1+rd_t)} \right)$ un « *q* » tronqué, ou un « *q* » à une seule période future.

Le modèle d'Agénor (2003) est semblable à celui de Jung et Thorbecke (2001), à cette différence près qu'il tient compte de la dépréciation et de l'inflation. Celui de Collange (1993), qui vise à saisir les effets des contraintes de financement (ou plutôt l'importance de l'autofinancement dans les pays en développement), est plutôt de nature *ad hoc*, de l'aveu même de son auteur.

Un modèle de la demande d'investissement par industrie, couplé à l'hypothèse d'une offre parfaitement inélastique, indépendante de la rémunération du capital, déterminée par l'égalité épargne-investissement, constitue une spécification complète. Nous avons néanmoins examiné d'autres options de modélisation.

Le modèle à générations de capital de Beghin *et al*. (1996) et de Mensbrugghe (2003) propose une tout autre voie. Il n'y a pas, à proprement parler, de demande d'*investissement* dans ce modèle. Il n'y a qu'une demande et une offre de *capital*, avec mobilité parfaite pour le capital nouveau et partielle pour le capital ancien. Et l'offre agrégée de capital est indépendante de la rémunération du capital. Car l'ancien capital est hérité de la période précédente; quant au nouveau capital, il est simplement le rapport de l'épargne de la période précédente sur le prix agrégé de l'investissement à cette même période, alors que l'épargne étrangère est exogène et que l'épargne des ménages est une fraction constante du revenu supernuméraire[20].

La fonction de répartition des investissements du modèle *MIRAGE* de Bchir *et al.* (2002, p.119), transposée à notre notation, est donnée par

$$\frac{PK_{k,t} IND_{k,i,rg,t}}{IT_t} = \frac{A_{k,i,rg} PK_{k,t} KS_{k,i,rg,t} e^{\alpha \, rs_{k,i,rg,t}}}{\sum_{kj} \sum_{j} \sum_{rgj} A_{kj,j,rgj} PK_{kj,t} KS_{kj,j,rgj,t} e^{\alpha \, rs_{kj,j,rgj,t}}} \qquad [168]$$

Cela correspond au modèle gravitaire, fondé sur une analogie avec loi de la gravité de Newton, où la « force d'attraction » d'une destination est donnée par le stock de capital, évalué au coût de remplacement : $PK_{k,t}\ KS_{k,i,rg,t}$ et où la « friction de la distance » est une fonction inverse du taux de rémunération du capital $rs_{k,i,rg,t}$.

Nous avons aussi exploré le modèle logit multinomial, qui est fondé sur la notion d'utilité aléatoire (*random utility*). Selon ce modèle de choix discrets, chaque individu choisit rationnellement la possibilité qui comporte pour lui l'utilité maximale. Mais l'utilité d'une possibilité donnée pour un individu donné n'est pas déterministe, parce que les investisseurs ne sont pas unanimes dans leurs anticipations : puisque la formulation des anticipations individuelles dépend d'une multitude de facteurs, dont un grand nombre sont inobservables, on peut représenter ces variations au moyen d'un terme aléatoire. L'utilité de l'investissement *i* pour l'investisseur *n* peut donc s'écrire

$$U_{in} = \beta_i \, v_i + \varepsilon_{in} \qquad [138]$$

où :

$v_i = \left(\frac{rs_i}{TIN} - PK_i \right)$ est la valeur présente nette d'un investissement d'une unité de capital dans l'industrie *i* sous l'hypothèse d'anticipations stationnaires;

rs_i est le taux de rémunération du capital *i*;

β_i est le paramètre de sensibilité de l'investisseur aux v_i;

$\beta_i \, v_i$ est donc la partie systématique de l'utilité;

---

[20] Dans la version simplifiée de Mensbrugghe (2003), il n'y a pas de gouvernement ni d'épargne des entreprises. Mais même dans la version plus élaborée de Beghin *et al*. (1996), l'offre agrégée de capital demeure indépendante de la rémunération du capital.

ε_{in} est le terme aléatoire.

Il en découle que la probabilité que l'investisseur *n* choisisse l'industrie de destination *i* est donnée par

$$\Pr_n(i) = \frac{\exp(\beta_i v_i)}{\sum_j \exp(\beta_j v_j)} \qquad [140]$$

Avec un grand nombre d'investisseurs *n*, identiques sauf pour la valeur des termes aléatoires, la probabilité $\Pr_n(i)$ donne la répartition des investissements entre les industries.

L'équation d'investissement du modèle *MIRAGE* peut aussi être interprétée comme un modèle logit multinomial. En l'occurrence, la fonction d'utilité systématique qui conduit au modèle *MIRAGE* est

$$v_{k,i,rg,t} = \ln(A_{k,i,rg} PK_{k,t} KS_{k,i,rg,t}) + \alpha\, rs_{k,i,rg,t} \qquad [179]$$

L'intérêt de voir ce modèle comme un logit multinomial est que cela fait ressortir la nature *ad hoc* du premier terme de l'utilité systématique, qui en constitue la partie « inertielle ».

Parmi les autres modèles examinés, la plupart (Abbink, Braber et Cohen, 1995 ; Thurlow, 2003 et Dervis, de Melo et Robinson, 1982) sont des modèles de parts des investissements en fonction des taux relatifs de rendement ou de rémunération du capital. Bien que ces formulations paraissent sensées, leurs fondements théoriques ne sont pas formellement explicités.

4.2 Liens avec la problématique de l'épargne et celle de la dette

Avec le modèle gravitaire de *MIRAGE* ou le modèle d'offre logit multinomial, il n'y a pas *a priori* de lien entre la répartition des investissements par destination et l'épargne ou la dette. Avec les modèles de demande d'investissement, par contre, oui. Le taux d'intérêt endogène, qui joue le rôle de taux d'actualisation, peut créer un lien entre la demande d'investissement et l'épargne courante et la dette future.

Pour l'épargne courante, cela est évident dans la mesure où l'épargne dépend du taux d'intérêt réel. Pour ce qui est de la dette, on peut imaginer que certains flux financiers de la période future soient déterminés par le taux d'intérêt auquel auront été contractés les emprunts de la période courante pour fins d'investissement.

4.3 CONCLUSION

A priori, notre préférence irait à un modèle de demande et plus exactement au modèle de Bourguignon *et al*. (1989) sous sa forme théoriquement exacte[21] (et non sous la forme *ad hoc* de l'équation [113]). Car les modèles de demande sont ceux qui ont les fondements théoriques les plus solides et, parmi eux, celui de Bourguignon *et al*. (1989) est le plus rigoureux. Mais, à cause de l'instabilité qu'il engendrait, les auteurs de ce modèle l'ont abandonné pour une formulation *ad hoc*. Nous avons constaté les mêmes difficultés lors de tentatives d'implantation dans le modèle *EXTER-D* (Lemelin, 2007).

Un examen exhaustif a permis d'identifier la cause de l'instabilité engendrée par la forme théorique de Bourguignon *et al.* : c'est la valeur très, très élevée de l'élasticité du taux d'accumulation par rapport au $\frac{R_t}{\bar{u}_t}$ de [111]. La forme Jung-Thorbecke suscite le même problème lorsqu'on attribue une valeur trop élevée au paramètre d'élasticité. Il n'est donc pas praticable de retenir une fonction d'accumulation théoriquement exacte.

Pour autant, nous ne proposons pas de retenir la solution pragmatique de Bourguignon *et al*., qui nous semble insatisfaisante pour deux raisons. D'abord, elle est très restrictive quant à la valeur de l'élasticité du taux d'accumulation par rapport à r_i / u_i ; à cet égard, la formulation de Jung et Thorbecke offre davantage de flexibilité. Ensuite, la procédure de calibrage de Bourguignon *et al*. impose

$$\frac{R_0}{\bar{u}_0} = 1 \qquad [199]$$

où R_0 et $\bar{u}_0$ sont les valeurs initiales de R_t et $\bar{u}_t$ respectivement. Pourtant, selon le modèle théorique, cette condition correspond justement à un taux d'accumulation brut nul, c'est-à-dire à un taux d'accumulation net de la dépréciation négatif.

À la lumière de ce qui précède, nous jetterions notre dévolu sur une fonction d'investissement qui s'inspire de Jung et Thorbecke (2001) :

$$\frac{INV_{it}}{K_{it}} = A_i \left(\frac{KINC_{it}}{PK_{it}\, K_{it} \left(r_t + \delta \right)} \right)^{\beta_i} \qquad [118]$$

---

[21] Dans ce cas, d'ailleurs, la cohérence exigerait que les coûts d'ajustement sous-jacents à cette forme de demande d'investissement soient pris en compte dans le MÉGC.

où le paramètre A_i est calibré en fonction d'un état régulier, caractérisé par :

$$\frac{INV_{it}}{K_{it}} = A_i \left(\frac{KINC_{it}}{PK_{it}\, K_{it} \left(r_t + \delta \right)} \right)^{\beta_i} = g + \delta \qquad [200]$$

où g est le taux de croissance exogène de l'offre de travail. On peut donc calibrer A_i au moyen de :

$$A_i = \left(g + \delta \right) \left(\frac{KINC_{it}}{PK_{it}\, K_{it} \left(r_t + \delta \right)} \right)^{-\beta_i} \qquad [201]$$

Références de la première partie

Abbink, G. A., M. C. Braber et S. I. Cohen (1995), « A SAM-CGE demonstration model for Indonesia. A : Static and dynamic specifications and expirements ». *International Economic Journal*, Vol 9 (3), p.15-33.

Agénor, P-R. (2003), The Mini-Integrated Macroeconomic Model for Poverty Analysis. The World Bank. Working Paper No 3067 http://econ.worldbank.org/files/27033_wps3067.pdf

Bchir, Mohamed Hedi, Yvan Decreux, Jean-Louis Guérin et Sébastien Jean (2002) « MIRAGE, un modèle d'équilibre général calculable pour l'évaluation des politiques commerciales », *Économie internationale*, 89-90, p. 109-153.
Version anglaise : http://www.cepii.fr/anglaisgraph/workpap/pdf/2002/wp02-17.pdf
Version française :
http://www.cepii.fr/francgraph/publications/ecointern/rev8990/rev8990mirage.pdf

Beghin, J., Dessus, S., Roland, H. D. et Mensbrugghe, D.V.D. (1996), General Equilibrium Modelling of Trade and The Environment. OECD, Technical Paper No. 116. http://www.oecd.org/pdf/M00006000/M00006067.pdf

Brainard, William C. et James Tobin (1968) « Pitfalls in financial model building », *American Economic Review,* 58 (2): 99-122.

Bourguignon, F., Branson, W. H. et de Melo, J. (1989) *Macroeconomic Adjustment and Income Distribution: A Macro-Micro Simulation Model*, OECD, Technical Paper No.1.

Collange, G. (1993), *Un modèle de l'économie ivoirienne*. Vol. 1, *Synthèse et présentation économique*. Études et documents CERDI.

Decaluwé, Bernard, André Lemelin, David Bahan et Nabil Annabi (2005) « Offre de travail endogène et mobilité du capital dans un MEGC bi-régional : la version statique du modèle d'équilibre général calculable du Ministère des Finances du Québec », texte d'une conférence donnée à Séville, lors de l'atelier international *The State-of-the-Art in Regional Modeling*, 21-23 octobre 2004, co-organisé par le Global Economic Modeling Network (ECOMOD) et la Fundación Centro de Estudio Andaluces (centrA), Ministère des Finances du Québec, collection *Feuille d'argent*, Travaux de recherche 2005-001, 62 pages.
http://www.finances.gouv.qc.ca/documents/feuille/fr/2005_001.pdf

Decreux, Yvan (1999) *Dynamique de la distribution du revenu suite à l'ouverture commerciale de la Tunisie*, Document de travail DT/99/05, DIAL.

Dervis, K., J. de Melo et S. Robinson (1982) *General Equilibrium models for Development Policy*. A World Bank Research Publication, Cambridge University Press.

Domencich, Thomas A. et McFadden, Daniel (1975) *Urban travel demand. A behavioral analysis*. A Charles River Associates research study, North Holland.

Dumont, J. C. et Mesplé-Somps, S. (2000), « The Impact of Public Infrastructure on Competitiveness and Growth: A CGE Analysis Applied to Senegal ». Cahier de Recherche No. 00.15. CREFA.
http://www.crefa.ecn.ulaval.ca/cahier/0015.pdf

Épaulard, Anne (1993) « L'apport du Q de Tobin à la modélisation de l'investissement en France », *Économie & Prévision* (109): 1-12.

Fargeix, A. et Sadoulet, E. (1994), A Financial Computable General Equilibrium Model for the Analysis of Stabilisation Programs. Chapitre 4, dans Mercenier, J. et Srinivasan, T. N. « Applied General Equilibrium and Economic Development: Present Achievements and Future Trends ». The University of Michigan Press.

Hayashi, Fumio (1982) « Tobin's marginal Q and average Q : a neoclassical interpretation », *Econometrica*, 213-224, janvier.

Jung, H.S. et Thorbecke, E.(2001) The Impact of Public Education Expenditure on Human Capital, Growth, and Poverty in Tanzania and Zambia: A General Equilibrium Approach. International Monetary Fund. IMF Working Paper WP/01/106
http://www.worldbank.org/wbi/macroeconomics/modeling/IMMPA-html/Jung-Thorbecke01.pdf

Lemelin, André (2007), « Bond indebtedness in a recursive dynamic CGE model », CIRPÉE (Centre Interuniversitaire sur le Risque, les Politiques Économiques et l'Emploi), Cahier de recherche 07-10, mars.
http://132.203.59.36/CIRPEE/indexbase.htm
http://ssrn.com/abstract=984310

Mensbrugghe, D.V.D. (2003), « A simple dynamic model with vintage capital », Development Prospects Group, The World Bank, March 4.

Mensbrugghe, D.V.D. (2003), LINKAGE. Technical Reference Document, World Bank.
http://www.worldbank.org/prospects/pubs/TechRef.pdf

Mensbrugghe, D.V.D. (1994), GREEN: The Reference Manual. OECD Technical Paper No.143.

Nickell, S. J. (1978) *The investment decisions of firms*, Cambridge University Press, Oxford.

Thurlow, J. (2003), A Dynamic Computable General Equilibrium (CGE) Model for South Africa : Extending the Static IFPRI Model, Trade and Industrial Policy Strategies, Pretoria.
http://www.tips.org.za/research/papers/pdfs/707.pdf

Tirole, Jean (1982) « On the Possibility of Speculation under Rational Expectations », *Econometrica.* 50, 1163-1181.

Tobin, James (1969) « A general equilibrium approach to monetary theory », *Journal of Money, Credit and Banking,* 1: 15-29.

Wilson, A. G. « Interregional commodity flows : entropy maximizing approaches ». *Geographical Analysis*. 1970; 11(3):255-282.

Annexe A1 : Un modèle théorique avec coûts d'ajustement homogènes de premier degré

Nickell (1978) développe au chapitre 3 un modèle théorique avec coûts d'ajustement[22]. Il pose l'hypothèse suivante :

8. Il y a des coûts d'ajustement associés à des variations du stock de capital. Ces coûts sont fonction de l'investissement brut, ils croissent avec la valeur absolue du taux d'investissement ou de désinvestissement et, qui plus est, ils croissent à un taux croissant. Ils ne sont nuls que quand l'investissement brut est nul.

Formellement, cela implique une fonction de coûts d'ajustement $C(I)$ ayant les propriétés suivantes (Nickell, 1978, p. 27) :

$$C'(I_t) > ou < 0 \Leftrightarrow I_t > ou < 0 \qquad [059]$$

$$C(0) = 0 \qquad [060]$$

$$C''(I_t) > 0 \qquad [061]$$

Parmi les formes fonctionnelles qui respectent ces propriétés, on a[23] :

$$C(I_t, K_t) = q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_t^2}{K_t} \qquad [082]$$

Les coûts d'ajustement sont fonction du volume des investissements et inversement proportionnels au stock de capital et les conditions de Hayashi (1982) sont remplies.

A1.1 Conditions premières de l'optimum

Comme auparavant, la firme maximise la valeur présente de son flux de trésorerie. Si l'on suppose le taux d'actualisation constant, le problème de maximisation est donc :

---

[22] Épaulard (1993) parle de coûts d'installation.

[23] Cette forme est présentée avec quelques variantes dans Nabil Annabi, *Les MEGC avec anticipations rationnelles : introduction*, présentation diapo, mars 2003; diapositive No 33 et suivantes. Il est à noter que cette fonction de coûts d'ajustement est parfois sous la forme

$$C(I_t, K_t) = \frac{\gamma}{2} \frac{I_t^2}{K_t}$$

auquel cas [202] s'écrit

$$MAX\ V = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t - q_t C(I_t, K_t) \right]$$

$$MAX\ V = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t - C(I_t, K_t) \right] \qquad [202]$$

$$\text{s.c. } I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t = K_{t+1} - (1-\delta) K_t \qquad [014]$$

$$\text{et } K_0 = \overline{K}_0 \qquad [005]$$

En substituant la fonction de coût d'ajustement, la fonction objectif s'écrit

$$MAX\ V = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t - q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_t^2}{K_t} \right] \qquad [203]$$

$$MAX\ V = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t \left(1 + \frac{\gamma}{2} \frac{I_t}{K_t} \right) \right] \qquad [204]$$

Écrivons le lagrangien :

$$\Lambda = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left\{ p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t \left(1 + \frac{\gamma}{2} \frac{I_t}{K_t} \right) + \lambda_t \left[I_t - K_{t+1} + (1-\delta) K_t \right] \right\}$$

$$- \mu \left(K_0 - \overline{K}_0 \right) \qquad [205]$$

La solution conduit aux conditions de premier ordre

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial L_t} = \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t \frac{\partial F}{\partial L_t} - w_t \right] = 0 \qquad [206]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial I_t} = \frac{1}{(1+r)^t} \left[q_t \left(-1 - \gamma \frac{I_t}{K_t} \right) + \lambda_t \right] = \frac{1}{(1+r)^t} \left[-q_t \left(1 + \gamma \frac{I_t}{K_t} \right) + \lambda_t \right] = 0 \qquad [207]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial K_t} = \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_t^2}{K_t^2} - (1+r) \lambda_{t-1} + (1-\delta) \lambda_t \right] = 0 \qquad [208]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_t} = \frac{1}{(1+r)^t} \left[I_t - K_{t+1} + (1-\delta) K_t \right] \qquad [209]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \mu} = -\left(K_0 - \overline{K}_0 \right) = 0 \qquad [210]$$

La condition [207] équivaut à

$$\lambda_t = q_t\left(1+\gamma\frac{I_t}{K_t}\right) \quad [211]$$

En substituant λ_{t-1} et λ_t dans [208], on a

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial K_t} = \frac{1}{(1+r)^t}\left[p_t\frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t\frac{\gamma}{2}\frac{I_t^2}{K_t^2} - (1+r)\,q_{t-1}\left(1+\gamma\frac{I_{t-1}}{K_{t-1}}\right) + (1-\delta)q_t\left(1+\gamma\frac{I_t}{K_t}\right)\right] = 0 \quad [212]$$

$$p_t\frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t\frac{\gamma}{2}\frac{I_t^2}{K_t^2} - (1+r)\,q_{t-1}\left(1+\gamma\frac{I_{t-1}}{K_{t-1}}\right) + (1-\delta)q_t\left(1+\gamma\frac{I_t}{K_t}\right) = 0 \quad [213]$$

Les conditions de premier ordre deviennent :

$$p_t\frac{\partial F}{\partial L_t} = w \quad [016]$$

$$p_t\frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t\frac{\gamma}{2}\frac{I_t^2}{K_t^2} - (1+r)\,q_{t-1}\left(1+\gamma\frac{I_{t-1}}{K_{t-1}}\right) + (1-\delta)q_t\left(1+\gamma\frac{I_t}{K_t}\right) = 0 \quad [213]$$

$$I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t \quad [014]$$

$$K_0 = \overline{K}_0 \quad [005]$$

Posons

$$Q_t = \frac{\partial}{\partial I_t}\left[q_t I_t\left(1+\frac{\gamma}{2}\frac{I_t}{K_t}\right)\right] = q_t\left(1+\gamma\frac{I_t}{K_t}\right) \quad [214]$$

C'est le coût marginal, ou prix implicite de remplacement, de l'investissement, en présence de coûts d’ajustement.

On peut récrire [213]

$$p_t\frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t\frac{\gamma}{2}\frac{I_t^2}{K_t^2} = (1+r)Q_{t-1} - (1-\delta)Q_t \quad [215]$$

A1.2 COÛT D’USAGE DU CAPITAL AVEC COÛTS D’AJUSTEMENT

Définissons le taux rétrospectif d’augmentation du coût marginal du capital

$$\Pi_t = \frac{(Q_t - Q_{t-1})}{Q_{t-1}} \quad [067]$$

de sorte que

$$(Q_t - Q_{t-1}) = \frac{(Q_t - Q_{t-1})}{Q_{t-1}} Q_{t-1} = \Pi_t Q_{t-1} \qquad [216]$$

On peut récrire [213] et [215]

$$\left(p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_t^2}{K_t^2} \right) = r\, Q_{t-1} + \delta Q_t - (Q_t - Q_{t-1}) \qquad [217]$$

$$\left(p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_t^2}{K_t^2} \right) = (r - \Pi_t) Q_{t-1} + \delta Q_t \qquad [218]$$

où

$$q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_t^2}{K_t^2} = -\frac{\partial}{\partial K_t} \left(q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_t^2}{K_t} \right) = -\frac{\partial C(I_t, K_t)}{\partial K_t} \qquad [219]$$

est la valeur marginale des coûts d'ajustement évités à la période t. Le membre de droite de [218] est donc la somme de la valeur du produit marginal du capital à la période t et de la valeur marginale des coûts d'ajustement évités à la période t. Posons donc

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial K_t} = p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} - \frac{\partial C(I_t, K_t)}{\partial K_t} = \left(p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_t^2}{K_t^2} \right) \qquad [220]$$

Par ailleurs, le membre de gauche de [218] est le coût d'usage du capital en présence de coûts d'ajustement :

$$U_t = (r - \Pi_t) Q_{t-1} + \delta Q_t \qquad [071]$$

La condition [218] peut donc s'écrire

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial K_t} = (r - \Pi_t) Q_{t-1} + \delta Q_t = U_t \qquad [221]$$

Elle est l'équivalent de [021], modifiée pour tenir compte de la présence de coûts d'ajustement.

A1.3 LE « Q » DE TOBIN DANS LES CONDITIONS PREMIÈRES

Où peut on retrouver le « q » de Tobin dans le modèle qui vient d'être énoncé ?

Rappelons que

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial K_t} = p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} - \frac{\partial C(I_t, K_t)}{\partial K_t} = \left(p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_t^2}{K_t^2} \right) \quad [220]$$

est la somme de la valeur du produit marginal du capital à la période *t* et de la valeur marginale des coûts d'ajustement évités à la période *t*.

Développons[24]

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_t^2}{K_t^2} = (1+r)Q_{t-1} - (1-\delta)Q_t \quad [215]$$

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial K_t} = (1+r)Q_{t-1} - (1-\delta)Q_t \quad [222]$$

$$(1+r)Q_{t-1} = (1-\delta)Q_t + \frac{\partial \Phi_t}{\partial K_t} \quad [223]$$

$$(1+r)Q_t = (1-\delta)Q_{t+1} + \frac{\partial \Phi_{t+1}}{\partial K_{t+1}} \quad [224]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \left[(1-\delta)Q_{t+1} + \frac{\partial \Phi_{t+1}}{\partial K_{t+1}} \right] \quad [225]$$

$$Q_t K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)} \left[(1-\delta)Q_{t+1} K_{t+1} + \frac{\partial \Phi_{t+1}}{\partial K_{t+1}} K_{t+1} \right] \quad [226]$$

Or, la contrainte d'accumulation

$$I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t \quad [014]$$

équivaut à

$$(1-\delta)K_t = K_{t+1} - I_t \quad [030]$$

En substituant, on trouve

$$Q_t K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)} \left(Q_{t+1} \left(K_{t+2} - I_{t+1} \right) + \frac{\partial \Phi_{t+1}}{\partial K_{t+1}} K_{t+1} \right) \quad [227]$$

$$Q_t K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)} \left(Q_{t+1} K_{t+2} - Q_{t+1} I_{t+1} + \frac{\partial \Phi_{t+1}}{\partial K_{t+1}} K_{t+1} \right) \quad [228]$$

---

24 Le développement qui suit est parallèle à celui de Hayashi (1982) tel que reproduit dans Nabil Annabi, *Les MEGC avec anticipations rationnelles : introduction*, présentation diapo, mars 2003; voir les diapositives No 38 et suivantes.

$$Q_t\,K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left(\frac{\partial\Phi_{t+1}}{\partial K_{t+1}}K_{t+1} - Q_{t+1}\,I_{t+1} + Q_{t+1}\,K_{t+2}\right) \qquad [229]$$

où on peut remplacer le terme $Q_{t+1}\ K_{t+2}$ par son expression selon cette même relation. Il vient

$$Q_t\,K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\partial\Phi_{t+1}}{\partial K_{t+1}}K_{t+1} - Q_{t+1}\,I_{t+1} \\ + \dfrac{1}{(1+r)}\left(\dfrac{\partial\Phi_{t+2}}{\partial K_{t+2}}K_{t+2} - Q_{t+2}\,I_{t+2} + Q_{t+2}\,K_{t+3}\right)\end{array}\right] \qquad [230]$$

Par substitutions successives, on arrive à

$$Q_t\,K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^s}\left[\frac{\partial\Phi_{t+s}}{\partial K_{t+s}}K_{t+s} - Q_{t+s}\,I_{t+s}\right] + \lim_{s\to\infty}\left(\frac{1}{(1+r)^s}Q_{t+s}\,K_{t+s+1}\right) \qquad [231]$$

où le dernier terme est nul en vertu de la condition de transversalité

$$\lim_{s\to\infty}\left(\frac{1}{(1+r)^s}Q_{t+s}\,K_{t+s+1}\right) = 0 \qquad [077]$$

On a donc

$$Q_t\,K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^s}\left[\frac{\partial\Phi_{t+s}}{\partial K_{t+s}}K_{t+s} - Q_{t+s}\,I_{t+s}\right] \qquad [232]$$

Nous nous écartons maintenant des hypothèses de Nickell (1978) et, au lieu de rendements à l’échelle strictement decroissants, nous supposons des rendements constants. La fonction de production $F(K_t,K_t)$ est alors homogène du premier degré, ce qui implique la condition d’Euler

$$F(K_t,L_t) = \frac{\partial F}{\partial K_t}K_t + \frac{\partial F}{\partial L_t}L_t \qquad [040]$$

et, de façon équivalente

$$\frac{\partial F}{\partial K_t}K_t = F(K_t,L_t) - \frac{\partial F}{\partial L_t}L_t \qquad [233]$$

$$p_t\,\frac{\partial F}{\partial K_t}K_t = p_t\,F(K_t,L_t) - p_t\,\frac{\partial F}{\partial L_t}L_t \qquad [234]$$

Étant donné la condition première

$$p_t\,\frac{\partial F}{\partial L_t} = w_t \qquad [016]$$

la condition d’Euler revient à

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} K_t = p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t \qquad [041]$$

Étant donné

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial K_t} = \left(p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_t^2}{K_t^2} \right) \qquad [220]$$

il s'ensuit

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial K_t} K_t = \left(p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t + q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_t^2}{K_t^2} K_t \right) = \left(p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t + q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_t^2}{K_t} \right) \qquad [235]$$

et remplaçons $\frac{\partial \Phi_{t+s}}{\partial K_{t+s}} K_{t+s}$ dans [232] :

$$Q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s} L_{t+s} + q_{t+s} \frac{\gamma}{2} \frac{I_{t+s}^2}{K_{t+s}} - Q_{t+s} I_{t+s} \right] \qquad [236]$$

Rappelons encore que

$$Q_t = \frac{\partial}{\partial I_t} \left[q_t I_t \left(1 + \frac{\gamma}{2} \frac{I_t}{K_t} \right) \right] = q_t \left(1 + \gamma \frac{I_t}{K_t} \right) \qquad [214]$$

et explicitons davantage [232] en écrivant

$$Q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \begin{bmatrix} p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s} L_{t+s} \\ + q_{t+s} \frac{\gamma}{2} \frac{I_{t+s}^2}{K_{t+s}} - q_{t+s} \left(1 + \gamma \frac{I_{t+s}}{K_{t+s}} \right) I_{t+s} \end{bmatrix} \qquad [237]$$

$$Q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \begin{Bmatrix} p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s} L_{t+s} \\ + q_{t+s} I_{t+s} \left[\frac{\gamma}{2} \frac{I_{t+s}}{K_{t+s}} - \left(1 + \gamma \frac{I_{t+s}}{K_{t+s}} \right) \right] \end{Bmatrix} \qquad [238]$$

$$Q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s} L_{t+s} - q_{t+s} I_{t+s} \left(1 + \frac{\gamma}{2} \frac{I_{t+s}}{K_{t+s}} \right) \right] \qquad [239]$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s} L_{t+s} - q_{t+s} I_{t+s} \left(1 + \frac{\gamma}{2} \frac{I_{t+s}}{K_{t+s}} \right) \right]}{Q_t K_{t+1}} = 1 \qquad [083]$$

Le numérateur de [083] est la valeur présente à la période *t* des flux de trésorerie de l'entreprise à partir de la période *t*+1; le taux d'actualisation est celui du marché, de sorte que cette valeur présente correspond à l'évaluation boursière qui se trouve au numérateur du « *q* » de Tobin. Remarquons le décalage d'une période : le capital disponible à la période *t*+1 doit avoir été investi à la période *t* (ou réinvesti, c'est-à-dire non désinvesti); les flux de trésorerie à prendre en compte sont donc ceux à partir de la période *t*+1. Au dénominateur de [083], on a le coût marginal de remplacement à la période *t* du capital qui sera utilisé à partir de la période *t*+1. On note qu'il s'agit bien du coût marginal de remplacement, et non du coût d'usage. Le rapport du membre de gauche de [083] est donc analogue au « *q* » de Tobin : l'investissement consenti en *t* est optimal quand ce rapport est égal à 1. Mais à la différence du « *q* » de Tobin, le dénominateur du rapport de [083] n'est pas un prix constant, mais un coût marginal qui tient compte des coûts d'ajustement.

A1.4 L'ÉQUILIBRE INTERTEMPOREL DU CAPITAL

La condition

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t \frac{\gamma}{2} \frac{{I_t}^2}{{K_t}^2} = (1+r)Q_{t-1} - (1-\delta)Q_t \qquad [215]$$

équivaut à

$$(1-\delta)Q_t = (1+r)Q_{t-1} - \left(p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t \frac{\gamma}{2} \frac{{I_t}^2}{{K_t}^2} \right) \qquad [240]$$

$$Q_t = \frac{(1+r)}{(1-\delta)} Q_{t-1} - \frac{1}{(1-\delta)} \left(p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t \frac{\gamma}{2} \frac{{I_t}^2}{{K_t}^2} \right) \qquad [241]$$

À l'optimum, l'investissement de la période *t* est poussé jusqu'au point où son coût marginal Q_t (qui croît avec I_t) satisfait cette condition.

Si on avance cette condition d'une période on obtient :

$$Q_{t+1} = \frac{(1+r)}{(1-\delta)} Q_t - \frac{1}{(1-\delta)} \left(p_{t+1} \frac{\partial F}{\partial K_{t+1}} + q_t \frac{\gamma}{2} \frac{{I_{t+1}}^2}{{K_{t+1}}^2} \right) \qquad [242]$$

que l'on récrit comme

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)}\left\{(1-\delta)Q_{t+1} + \left(p_{t+1}\frac{\partial F}{\partial K_{t+1}} + q_{t+1}\frac{\gamma}{2}\frac{I_{t+1}^2}{K_{t+1}^2}\right)\right\} \quad [243]$$

En déplaçant cette équation vers l'avant pour $t+1$, $t+2$, etc., on obtient

$$Q_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left\{(1-\delta)Q_{t+2} + \left(p_{t+2}\frac{\partial F}{\partial K_{t+2}} + q_{t+1}\frac{\gamma}{2}\frac{I_{t+2}^2}{K_{t+2}^2}\right)\right\} \quad [244]$$

$$Q_{t+2} = \frac{1}{(1+r)}\left\{(1-\delta)Q_{t+3} + \left(p_{t+3}\frac{\partial F}{\partial K_{t+3}} + q_{t+1}\frac{\gamma}{2}\frac{I_{t+3}^2}{K_{t+3}^2}\right)\right\} \quad [245]$$

Puis, en faisant des substitutions successives, on trouve :

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)}\left\{\begin{array}{l} \frac{(1-\delta)^3}{(1+r)^2}Q_{t+3} + \frac{(1-\delta)^2}{(1+r)^2}\left(p_{t+3}\frac{\partial F}{\partial K_{t+3}} + q_{t+3}\frac{\gamma}{2}\frac{I_{t+3}^2}{K_{t+3}^2}\right) \\ + \frac{(1-\delta)}{(1+r)}\left(p_{t+2}\frac{\partial F}{\partial K_{t+2}} + q_{t+2}\frac{\gamma}{2}\frac{I_{t+2}^2}{K_{t+2}^2}\right) \\ + \left(p_{t+1}\frac{\partial F}{\partial K_{t+1}} + q_{t+1}\frac{\gamma}{2}\frac{I_{t+1}^2}{K_{t+1}^2}\right) \end{array}\right\} \quad [246]$$

ou encore, après développement :

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)}\left\{\begin{array}{l} \frac{(1-\delta)^s}{(1+r)^{s-1}}Q_{t+s} + \frac{(1-\delta)^{s-1}}{(1+r)^{s-1}}\left(p_{t+s}\frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} + q_{t+s}\frac{\gamma}{2}\frac{I_{t+s}^2}{K_{t+s}^2}\right) \\ \vdots \\ + \frac{(1-\delta)^2}{(1+r)^2}\left(p_{t+3}\frac{\partial F}{\partial K_{t+3}} + q_{t+3}\frac{\gamma}{2}\frac{I_{t+3}^2}{K_{t+3}^2}\right) \\ + \frac{(1-\delta)}{(1+r)}\left(p_{t+2}\frac{\partial F}{\partial K_{t+2}} + q_{t+2}\frac{\gamma}{2}\frac{I_{t+2}^2}{K_{t+2}^2}\right) \\ + \left(p_{t+1}\frac{\partial F}{\partial K_{t+1}} + q_{t+1}\frac{\gamma}{2}\frac{I_{t+1}^2}{K_{t+1}^2}\right) \end{array}\right\} \quad [247]$$

Avec la condition d'absence de bulles,

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^t Q_t = 0 \quad [087]$$

on obtient enfin

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^{s-1} \left(p_{t+s} \frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} + q_{t+s} \frac{\gamma}{2} \frac{I_{t+s}{}^2}{K_{t+s}{}^2} \right) \qquad [248]$$

Dénotons la valeur de la productivité marginale du capital

$$R_t = p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} \qquad [052]$$

et, comme auparavant, la fonction de coûts d'ajustement

$$C(I_t, K_t) = q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_t{}^2}{K_t} \qquad [082]$$

et

$$\frac{\partial C(I_t, K_t)}{\partial K_t} = -q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_t^2}{K_t^2} = -\frac{C(I_t, K_t)}{K_t} \qquad [249]$$

On peut écrire

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^{s-1} \left(R_{t+s} - \frac{\partial C(I_{t+s}, K_{t+s})}{\partial K_{t+s}} \right) \qquad [250]$$

ou, de façon équivalente

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^{s} \left(R_{t+s+1} - \frac{\partial C(I_{t+s+1}, K_{t+s+1})}{\partial K_{t+s+1}} \right) \qquad [251]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^{s} \left(R_{t+s+1} + \frac{C(I_{t+s+1}, K_{t+s+1})}{K_{t+s+1}} \right) \qquad [252]$$

Rappelons que Q_t est le coût marginal du nouveau capital :

$$Q_t = \frac{\partial}{\partial I_t} \left[q_t I_t \left(1 + \frac{\gamma}{2} \frac{I_t}{K_t} \right) \right] = q_t \left(1 + \gamma \frac{I_t}{K_t} \right) \qquad [214]$$

La condition [252] montre donc qu'à l'optimum, le coût marginal du nouveau capital doit être égal à son revenu marginal, qui est la somme actualisée des flux de revenus futurs qu'il engendre; ces revenus futurs sont constitués (1) des valeurs R_{t+s} des produits marginaux et (2) des coûts d'ajustement évités, donnés par

$$-\frac{\partial C(I_{t+s},K_{t+s})}{\partial K_{t+s}} > 0$$

Ces flux diminuent dans le temps au fur et à mesure de la dépréciation du capital; d'où, le facteur d'attrition $(1-\delta)^{s-1}$.

A1.5 DEMANDE D'INVESTISSEMENT AVEC ANTICIPATIONS STATIONNAIRES

L'équation du coût marginal du nouveau capital :

$$Q_t = \frac{\partial}{\partial I_t}\left[q_t I_t\left(1+\frac{\gamma}{2}\frac{I_t}{K_t}\right)\right] = q_t\left(1+\gamma\frac{I_t}{K_t}\right) \qquad [214]$$

équivaut à

$$\frac{I_t}{K_t} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{Q_t}{q_t}-1\right) \qquad [253]$$

Mais l'équation

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^s\left(R_{t+s+1}+\frac{C(I_{t+s+1},K_{t+s+1})}{K_{t+s+1}}\right) \qquad [252]$$

montre que Q_t dépend des valeurs futures R_{t+s}, de sorte que sa valeur n'est pas connue à la période t, à moins que l'on fasse des hypothèses sur les valeurs anticipées de R_{t+s}. Supposons que $\tilde{R}_{t+s}$, la valeur anticipée au temps t de R_{t+s}, soit constante (anticipations stationnaires) :

$$\tilde{R}_{t+s} = R_t, \forall s \geq 0 \qquad [054]$$

Nous avons examiné en 1.2.6 la question de la cohérence de cette hypothèse avec le modèle. Faisons en outre l'hypothèse que la valeur anticipée de

$$\frac{C(I_{t+s},K_{t+s})}{K_{t+s}} = q_{t+s}\frac{\gamma}{2}\frac{{I_{t+s}}^2}{{K_{t+s}}^2} \qquad [254]$$

soit elle aussi stationnaire, égale à

$$\frac{C(I_t,K_t)}{K_t} = q_t\frac{\gamma}{2}\frac{{I_t}^2}{{K_t}^2} \qquad [255]$$

Cette seconde hypothèse est-elle sensée ? Elle pourrait découler de la combinaison de deux hypothèses :

- l'hypothèse d'anticipations stationnaires quant au prix du bien d'investissement q_t :

  $\tilde{q}_{t+s} = q_t$

- l'hypothèse d'un taux d'accumulation anticipé constant, égal au taux d'accumulation courant : $\tilde{g} = \frac{I_t}{K_t}$; il est à noter qu'à ce stade-ci, la valeur de $\tilde{g} = \frac{I_t}{K_t}$ est encore inconnue.

On obtient alors

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^s \left(\tilde{R}_{t+s+1} + \tilde{q}_{t+s+1} \frac{\gamma}{2} \tilde{g}^2 \right) \qquad [252]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^s \left(R_t + q_t \frac{\gamma}{2} \tilde{g}^2 \right) \qquad [256]$$

On peut réécrire cette équation en utilisant la formule d'une suite géometrique :

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \left(\frac{1}{1 - \frac{1-\delta}{1+r}} \right) \left(R_t + q_t \frac{\gamma}{2} \tilde{g}^2 \right) \qquad [257]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \frac{1}{\left(\frac{r+\delta}{1+r} \right)} \left(R_t + q_t \frac{\gamma}{2} \tilde{g}^2 \right) \qquad [258]$$

$$Q_t = \frac{1}{(r+\delta)} \left(R_t + q_t \frac{\gamma}{2} \tilde{g}^2 \right) \qquad [259]$$

En substituant [259] dans [253], on trouve l'équation de demande d'investissement avec anticipations stationnaires en présence de coûts d'ajustement de la forme [082] :

$$\frac{I_t}{K_t} = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{1}{q_t (r+\delta)} \left(R_t + q_t \frac{\gamma}{2} \tilde{g}^2 \right) - 1 \right] \qquad [260]$$

et, puisque

$$\tilde{g} = \frac{I_t}{K_t} \qquad [261]$$

on a

$$\tilde{g} = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{q_t(r+\delta)}\left(R_t + q_t \frac{\gamma}{2}\tilde{g}^2\right) - 1\right] \qquad [262]$$

Pour trouver la fonction d'investissement, il suffit de résoudre cette équation quadratique :

$$\left(1+\gamma\,\tilde{g}\right) = \frac{1}{q_t(r+\delta)}\left(R_t + q_t \frac{\gamma}{2}\tilde{g}^2\right) \qquad [263]$$

$$\left(1+\gamma\,\tilde{g}\right) = \frac{R_t}{q_t(r+\delta)} + \frac{1}{q_t(r+\delta)} q_t \frac{\gamma}{2}\tilde{g}^2 \qquad [264]$$

$$\left(1+\gamma\,\tilde{g}\right) = \frac{R_t}{q_t(r+\delta)} + \frac{1}{(r+\delta)} \frac{\gamma}{2}\tilde{g}^2 \qquad [265]$$

$$\frac{1}{(r+\delta)}\frac{\gamma}{2}\tilde{g}^2 - \gamma\,\tilde{g} + \left(\frac{R_t}{q_t(r+\delta)} - 1\right) = 0 \qquad [266]$$

Posons

$$A = \frac{1}{(r+\delta)}\frac{\gamma}{2} \qquad [267]$$

$$B = -\gamma \qquad [268]$$

$$C = \frac{R_t}{q_t(r+\delta)} - 1 \qquad [269]$$

et on obtient

$$\frac{I_t}{K_t} = \tilde{g} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \qquad [270]$$

$$\frac{I_t}{K_t} = \tilde{g} = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\frac{1}{(r+\delta)}\frac{\gamma}{2}\left(\frac{R_t}{q_t(r+\delta)} - 1\right)}}{2\frac{1}{(r+\delta)}\frac{\gamma}{2}} \qquad [271]$$

Après simplification, en divisant le numérateur et le dénominateur par γ, on obtient la fonction d'investissement

$$\frac{I_t}{K_t} = \tilde{g} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{\gamma}\frac{1}{(r+\delta)}\left(\frac{R_t}{q_t(r+\delta)} - 1\right)}}{\frac{1}{(r+\delta)}} \qquad [272]$$

$$\frac{I_t}{K_t} = \tilde{g} = (r+\delta)\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{\gamma}\frac{1}{(r+\delta)}\left(\frac{R_t}{q_t(r+\delta)} - 1\right)}\right] \qquad [273]$$

On remarque que le dénominateur de R_t dans l'équation qui précède est égal au coût d'usage du capital avec anticipations stationnaires en l'absence de coûts d'ajustement

$$\bar{u}_t = (r+\delta)\,q_t \qquad [056]$$

Rien, cependant, ne se rapproche de la fonction de demande [273] dans les écrits que nous avons passés en revue.

Annexe A2 : Développements mathématiques

A2.1 MODÈLE DE BASE EN TEMPS DISCRET : CONDITIONS PREMIÈRES DE L'OPTIMUM

La firme maximise la valeur présente de son flux de trésorerie. Si l'on suppose constant le taux d'actualisation r, en remplaçant I_t dans la fonction objectif par le membre de droite de [014], le problème de maximisation est donc :

$$MAX\ V = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t \right] \qquad [015]$$

$$\text{s.c. } I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t = K_{t+1} - (1-\delta) K_t \qquad [014]$$

$$\text{et } K_0 = \overline{K}_0 \qquad [005]$$

Le lagrangien s'écrit

$$\Lambda = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left\{ \left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t \right] + \lambda_t \left[I_t - K_{t+1} + (1-\delta) K_t \right] \right\} + \mu \left(K_0 - \overline{K}_0 \right) \qquad [274]$$

La solution conduit aux conditions de premier ordre

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial L_t} = \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t \frac{\partial F}{\partial L_t} - w_t \right] = 0 \qquad [206]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial I_t} = \frac{1}{(1+r)^t} \left(-q_t + \lambda_t \right) = 0 \qquad [275]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial K_t} = \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} - (1+r)\lambda_{t-1} + \lambda_t (1-\delta) \right] = 0 \qquad [276]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_t} = \left[I_t - K_{t+1} + (1-\delta) K_t \right] = 0 \qquad [209]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \mu} = \left(K_0 - \overline{K}_0 \right) = 0 \qquad [210]$$

La condition [275] s'écrit

$$\lambda_t = q_t \qquad [277]$$

et on peut récrire les conditions comme

$$p_t \frac{\partial F}{\partial L_t} = w \qquad [016]$$

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = (1+r)q_{t-1} - q_t(1-\delta) \qquad [017]$$

$$I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t \qquad [014]$$

$$K_0 = \overline{K}_0 \qquad [005]$$

On peut aussi écrire [017] sour la forme

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = rq_{t-1} + \delta q_t - (q_t - q_{t-1}) \qquad [018]$$

Le programme donné par les conditions [016], [017] et [005] peut aussi être défini séparément pour chaque période. Dénotons le coût d'usage du capital

$$u_t = (r - \pi_t)q_{t-1} + \delta q_t \qquad [022]$$

et posons le problème

$$MAX \left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - u_t K_t\right] \qquad [278]$$

$$\text{s.c. } I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t \qquad [014]$$

$$\text{et } K_0 = \overline{K}_0 \qquad [005]$$

Les conditions premières de l'optimum sont données par

$$p_t \frac{\partial F}{\partial L_t} = w \qquad [016]$$

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = u_t \qquad [279]$$

$$I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t \qquad [014]$$

$$K_0 = \overline{K}_0 \qquad [005]$$

Il est facile de vérifier que, étant donné [021] et [022], les conditions [016], [279], [014] et [005] sont strictement équivalentes à [016], [017], [014] et [005]. Toutefois, à la différence de la condition en temps continu

$$I_t = \dot{K}_t + \delta K_t \qquad [003]$$

la condition [014] ne fait pas intervenir que des valeurs courantes : on y trouve en effet K_{t+1}. Bien que l'on puisse découper le problème en tranches périodiques, la valeur optimale de I_t à la période t dépend de la valeur optimale de K_{t+1}. Le passage du temps continu au temps discret entraîne la substitution d'accroissements périodiques aux taux instantanés, de telle sorte que l'intertemporalité est irréductible[25].

A2.2 MODÈLE DE BASE EN TEMPS DISCRET : LE « q » DE TOBIN

Développons l'équation [017][26] :

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = (1+r)\,q_{t-1} - (1-\delta)\,q_t \qquad [017]$$

$$(1+r)\,q_{t-1} = (1-\delta)\,q_t + p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} \qquad [280]$$

$$(1+r)\,q_t = (1-\delta)\,q_{t+1} + p_{t+1} \frac{\partial F}{\partial K_{t+1}} \qquad [281]$$

$$q_t = \frac{1}{(1+r)}\left[(1-\delta)\,q_{t+1} + p_{t+1} \frac{\partial F}{\partial K_{t+1}}\right] \qquad [282]$$

$$q_t\,K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left[(1-\delta)\,q_{t+1}\,K_{t+1} + p_{t+1} \frac{\partial F}{\partial K_{t+1}} K_{t+1}\right] \qquad [029]$$

Or, la contrainte d'accumulation

$$I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t = K_{t+1} - (1-\delta) K_t \qquad [014]$$

équivaut à

$$(1-\delta) K_t = K_{t+1} - I_t \qquad [030]$$

En substituant dans [029], on trouve

$$q_t\,K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left(q_{t+1}\left(K_{t+2} - I_{t+1}\right) + p_{t+1} \frac{\partial F}{\partial K_{t+1}} K_{t+1}\right) \qquad [283]$$

$$q_t\,K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left(q_{t+1} K_{t+2} - q_{t+1} I_{t+1} + p_{t+1} \frac{\partial F}{\partial K_{t+1}} K_{t+1}\right) \qquad [284]$$

$$q_t\,K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left(p_{t+1} \frac{\partial F}{\partial K_{t+1}} K_{t+1} - q_{t+1} I_{t+1} + q_{t+1} K_{t+2}\right) \qquad [031]$$

---

25 À moins de supposer, comme dans MIRAGE (Bchir et al., 2002), que l'investissement est instantanément productif.

26 Le développement qui suit est parallèle à celui de Hayashi (1982) tel que reproduit dans Nabil Annabi, *Les MÉGC avec anticipations rationnelles : introduction*, présentation diapo, mars 2003; voir les diapositives No 38 et suivantes.

où on peut remplacer le terme $q_{t+1}\,K_{t+2}$ par son expression selon cette même relation. Il vient

$$q_t\,K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left[\begin{array}{l} p_{t+1}\dfrac{\partial F}{\partial K_{t+1}}K_{t+1} - q_{t+1}\,I_{t+1} \\ +\dfrac{1}{(1+r)}\left(p_{t+2}\dfrac{\partial F}{\partial K_{t+2}}K_{t+2} - q_{t+2}\,I_{t+2} + q_{t+2}\,K_{t+3}\right)\end{array}\right] \qquad [285]$$

Par substitutions successives, on arrive à

$$q_t\,K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^s}\left[p_{t+s}\frac{\partial F}{\partial K_{t+s}}K_{t+s} - q_{t+s}\,I_{t+s}\right] + \lim_{s\to\infty}\left(\frac{1}{(1+r)^s}q_{t+s}\,K_{t+s+1}\right) \qquad [032]$$

où le dernier terme est nul en vertu de la condition de transversalité (voir l'encart à la section 1.1.3).

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{(1+r)^s}q_{t+s}\,K_{t+s+1} = 0 \qquad [033]$$

On a donc

$$q_t\,K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^s}\left[p_{t+s}\frac{\partial F}{\partial K_{t+s}}K_{t+s} - q_{t+s}\,I_{t+s}\right] \qquad [039]$$

Nous nous écartons maintenant des hypothèses de Nickell (1978) et, au lieu de rendements à l'échelle strictement décroissants, nous supposons des rendements constants. La fonction de production $F(K_t,L_t)$ est alors homogène du premier degré, ce qui implique la condition d'Euler

$$F(K_t,L_t) = \frac{\partial F}{\partial K_t}K_t + \frac{\partial F}{\partial L_t}L_t \qquad [040]$$

et, de façon équivalente

$$\frac{\partial F}{\partial K_t}K_t = F(K_t,L_t) - \frac{\partial F}{\partial L_t}L_t \qquad [233]$$

$$p_t\frac{\partial F}{\partial K_t}K_t = p_t\,F(K_t,L_t) - p_t\frac{\partial F}{\partial L_t}L_t \qquad [234]$$

Étant donné la condition première

$$p_t\frac{\partial F}{\partial L_t} = w_t \qquad [016]$$

la condition d'Euler revient à

$$p_t\frac{\partial F}{\partial K_t}K_t = p_t\,F(K_t,L_t) - w_t\,L_t \qquad [041]$$

Et on peut donc récrire [039]

$$q_t\, K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s}\left[p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s}\, L_{t+s} - q_{t+s}\, I_{t+s}\right] \qquad [042]$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s}\left[p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s}\, L_{t+s} - q_{t+s}\, I_{t+s}\right]}{q_t\, K_{t+1}} = 1 \qquad [043]$$

A2.3 MODÈLE DE BASE EN TEMPS DISCRET : L'ÉQUILIBRE INTERTEMPOREL DU CAPITAL

La condition [017]

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = (1+r)\, q_{t-1} - (1-\delta)\, q_t \qquad [017]$$

équivaut à [282]

$$q_t = \frac{1}{(1+r)}\left\{(1-\delta)\, q_{t+1} + p_{t+1} \frac{\partial F}{\partial K_{t+1}}\right\} \qquad [282]$$

En déplaçant cette équation vers l'avant pour $t+1$, $t+2$, etc., on obtient

$$q_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left\{(1-\delta)\, q_{t+2} + p_{t+2} \frac{\partial F}{\partial K_{t+2}}\right\} \qquad [286]$$

$$q_{t+2} = \frac{1}{(1+r)}\left\{(1-\delta)\, q_{t+3} + p_{t+3} \frac{\partial F}{\partial K_{t+3}}\right\} \qquad [287]$$

etc.

Puis, en faisant des substitutions successives, on trouve :

$$q_t = \frac{1}{(1+r)}\left\{\begin{array}{l} \frac{(1-\delta)^3}{(1+r)^2}\, q_{t+3} + \frac{(1-\delta)^2}{(1+r)^2}\, p_{t+3} \frac{\partial F}{\partial K_{t+3}} \\ + \frac{(1-\delta)}{(1+r)}\, p_{t+2} \frac{\partial F}{\partial K_{t+2}} \\ + p_{t+1} \frac{\partial F}{\partial K_{t+1}} \end{array}\right\} \qquad [044]$$

ou encore, après développement :

$$q_t = \frac{1}{(1+r)} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(1-\delta)^s}{(1+r)^{s-1}} q_{t+s} + \dfrac{(1-\delta)^{s-1}}{(1+r)^{s-1}} p_{t+s} \dfrac{\partial F}{\partial K_{t+s}} \\ \vdots \\ + \dfrac{(1-\delta)^2}{(1+r)^2} p_{t+3} \dfrac{\partial F}{\partial K_{t+3}} \\ + \dfrac{(1-\delta)}{(1+r)} p_{t+2} \dfrac{\partial F}{\partial K_{t+2}} \\ + p_{t+1} \dfrac{\partial F}{\partial K_{t+1}} \end{array} \right\} \quad [288]$$

$$q_t = \frac{1}{(1+r)} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(1-\delta)^\theta}{(1+r)^{\theta-1}} q_{t+\theta} \\ + \displaystyle\sum_{s=1}^{\theta} \dfrac{(1-\delta)^{s-1}}{(1+r)^{s-1}} p_{t+s} \dfrac{\partial F}{\partial K_{t+s}} \end{array} \right\} \quad [289]$$

$$q_t = \frac{(1-\delta)^\theta}{(1+r)^\theta} q_\theta + \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=1}^{\theta} \frac{(1-\delta)^{s-1}}{(1+r)^{s-1}} p_{t+s} \frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} \quad [290]$$

$$q_t = \left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^\theta q_\theta + \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=1}^{\theta} \left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{s-1} p_{t+s} \frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} \quad [045]$$

On fait tendre θ vers l'infini pour obtenir

$$q_t = \underset{\theta\to\infty}{Lim} \left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^\theta q_\theta + \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{s-1} p_{t+s} \frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} \quad [046]$$

On impose la condition d'absence de bulles spéculatives,

$$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^t q_t = 0 \quad [050]$$

Avec cette condition, [046] devient

$$q_t = \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{s-1} p_{t+s} \frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} \quad [051]$$

A2.4 MODÈLE DE BASE EN TEMPS DISCRET : COÛT D'USAGE DU CAPITAL AVEC ANTICIPATIONS STATIONNAIRES

Pour alléger la notation, dénotons la valeur du produit marginal du capital par

$$R_t = p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} \quad [052]$$

L'équation [051] s'écrit

$$q_t = \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^s R_{t+s+1} \quad [053]$$

Dans cette expression, nous remplaçons R_{t+s+1} par sa valeur anticipée au temps t et supposons que cette valeur soit constante (anticipations stationnaires) :

$$\tilde{R}_{t+s} = R_t, \forall s \geq 0 \quad [054]$$

où $\tilde{R}_{t+s}$ est la valeur anticipée de R_{t+s} au temps t.

On peut réécrire la condition en utilisant la formule d'une suite géométrique :

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^s = \left(\frac{1}{1 - \frac{1-\delta}{1+r}} \right) \quad [094]$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^s = \frac{1}{\left(\frac{r+\delta}{1+r} \right)} \quad [095]$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^s = \frac{1+r}{r+\delta} \quad [096]$$

On substitue [096] et [054] dans [053] et il vient

$$q_t = \frac{1}{(r+\delta)} R_t \quad [291]$$

$$R_t = (r+\delta) q_t \quad [055]$$

A2.5 MODÈLE AVEC COÛTS D'AJUSTEMENT : CONDITIONS PREMIÈRES DE L'OPTIMUM

La firme maximise la valeur présente de son flux de trésorerie. Si l'on suppose le taux d'actualisation constant, le problème de maximisation est donc :

$$MAX\ V = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t - C(I_t) \right] \quad [063]$$

s.c. $I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t = K_{t+1} - (1-\delta) K_t$ [014]

et $K_0 = \overline{K}_0$ [005]

En substituant la fonction de coût d'ajustement, la fonction objectif s'écrit

$$MAX\ V = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t - q_t \frac{\gamma}{2} I_t^{\,2} \right] \quad [292]$$

$$MAX\ V = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t \left(1 + \frac{\gamma}{2} I_t \right) \right] \quad [293]$$

Écrivons le lagrangien :

$$\Lambda = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left\{ p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t \left(1 + \frac{\gamma}{2} I_t \right) + \lambda_t \left[I_t - K_{t+1} + (1-\delta) K_t \right] \right\} - \mu \left(K_0 - \overline{K}_0 \right)$$

[294]

La solution conduit aux conditions de premier ordre

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial L_t} = \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t \frac{\partial F}{\partial L_t} - w_t \right] = 0 \quad [206]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial I_t} = \frac{1}{(1+r)^t} \left[q_t \left(-1 - \gamma I_t \right) + \lambda_t \right] = \frac{1}{(1+r)^t} \left[-q_t \left(1 + \gamma I_t \right) + \lambda_t \right] = 0 \quad [295]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial K_t} = \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} - (1+r) \lambda_{t-1} + \lambda_t (1-\delta) \right] = 0 \quad [276]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_t} = \frac{1}{(1+r)^t} \left[I_t - K_{t+1} + (1-\delta) K_t \right] \quad [209]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \mu} = -\left(K_0 - \overline{K}_0 \right) = 0 \quad [210]$$

La condition [295] équivaut à

$$\lambda_{t+1} = q_t \left(1 + \gamma I_t \right) \quad [296]$$

En substituant λ_{t+1} et λ_t de cette dernière équation dans [276], on a

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} - (1+r) q_{t-1} \left(1 + \gamma I_{t-1} \right) + q_t \left(1 + \gamma I_t \right) (1-\delta) = 0 \quad [064]$$

Les conditions de premier ordre deviennent :

$$p_t \frac{\partial F}{\partial L_t} = w \qquad [016]$$

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = (1+r)q_{t-1}\left(1+\gamma I_{t-1}\right) - q_t\left(1+\gamma I_t\right)(1-\delta) \qquad [064]$$

$$I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t \qquad [014]$$

$$K_0 = \overline{K}_0 \qquad [005]$$

A2.6 MODÈLE AVEC COÛTS D'AJUSTEMENT : LE « q » DE TOBIN

Dénotons la productivité marginale en valeur du capital

$$R_t = p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} \qquad [052]$$

Développons [066][27] :

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = (1+r)Q_{t-1} - (1-\delta)Q_t \qquad [066]$$

$$R_t = (1+r)Q_{t-1} - (1-\delta)Q_t \qquad [297]$$

$$(1+r)Q_{t-1} = (1-\delta)Q_t + R_t \qquad [298]$$

$$(1+r)Q_t = (1-\delta)Q_{t+1} + R_{t+1} \qquad [299]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)}\left[(1-\delta)Q_{t+1} + R_{t+1}\right] \qquad [300]$$

$$Q_t K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left[(1-\delta)Q_{t+1}K_{t+1} + R_{t+1}K_{t+1}\right] \qquad [073]$$

Or, la contrainte d'accumulation

$$I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t \qquad [014]$$

équivaut à

$$(1-\delta)K_t = K_{t+1} - I_t \qquad [030]$$

En substituant dans [073], on trouve

$$Q_t K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left(Q_{t+1}\left(K_{t+2} - I_{t+1}\right) + R_{t+1}K_{t+1}\right) \qquad [301]$$

$$Q_t\,K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left(Q_{t+1}\,K_{t+2} - Q_{t+1}\,I_{t+1} + R_{t+1}\,K_{t+1}\right) \qquad [302]$$

$$Q_t\,K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left(R_{t+1}\,K_{t+1} - Q_{t+1}\,I_{t+1} + Q_{t+1}\,K_{t+2}\right) \qquad [074]$$

où on peut remplacer le terme $Q_{t+1}\,K_{t+2}$ par son expression selon cette même relation. Il vient

$$Q_t\,K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left[\begin{array}{l} R_{t+1}\,K_{t+1} - Q_{t+1}\,I_{t+1} \\ + \dfrac{1}{(1+r)}\left(R_{t+2}\,K_{t+2} - Q_{t+2}\,I_{t+2} + Q_{t+2}\,K_{t+3}\right) \end{array}\right] \qquad [075]$$

Par substitutions successives, on arrive à

$$Q_t\,K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^s}\left[R_{t+s}\,K_{t+s} - Q_{t+s}\,I_{t+s}\right] + \lim_{s\to\infty}\left(\frac{1}{(1+r)^s}Q_{t+s}\,K_{t+s+1}\right) \qquad [076]$$

où le dernier terme est nul en vertu de la condition de transversalité

$$\lim_{s\to\infty}\left(\frac{1}{(1+r)^s}Q_{t+s}\,K_{t+s+1}\right) = 0 \qquad [077]$$

On a donc

$$Q_t\,K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^s}\left[R_{t+s}\,K_{t+s} - Q_{t+s}\,I_{t+s}\right] \qquad [078]$$

Nous supposons des rendements constants. La fonction de production $F(K_t,K_t)$ est alors homogène du premier degré, ce qui implique la condition d'Euler

$$F(K_t,L_t) = \frac{\partial F}{\partial K_t}K_t + \frac{\partial F}{\partial L_t}L_t \qquad [040]$$

et, de façon équivalente

$$\frac{\partial F}{\partial K_t}K_t = F(K_t,L_t) - \frac{\partial F}{\partial L_t}L_t \qquad [233]$$

$$p_t\,\frac{\partial F}{\partial K_t}K_t = p_t\,F(K_t,L_t) - p_t\,\frac{\partial F}{\partial L_t}L_t \qquad [234]$$

Étant donné la condition première

[27] Le développement qui suit est parallèle à celui de Hayashi (1982) tel que reproduit dans Nabil Annabi, *Les MÉGC avec anticipations rationnelles : introduction*, présentation diapo, mars 2003; voir les diapositives No 38 et suivantes.

$$p_t \frac{\partial F}{\partial L_t} = w_t \qquad [016]$$

la condition d'Euler revient à

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} K_t = p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t \qquad [041]$$

ou

$$R_t K_t = p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t \qquad [079]$$

et remplaçons $R_{t+s} K_{t+s}$ dans [078] :

$$Q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s} L_{t+s} - Q_{t+s} I_{t+s} \right] \qquad [080]$$

Rappelons encore que

$$Q_t = \frac{\partial}{\partial I_t} \left[q_t I_t \left(1 + \frac{\gamma}{2} I_t \right) \right] = q_t (1 + \gamma I_t) \qquad [065]$$

et explicitons davantage [078] en écrivant

$$Q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s} L_{t+s} - q_{t+s} I_{t+s} (1 + \gamma I_{t+s}) \right] \qquad [303]$$

$$Q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \begin{bmatrix} p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s} L_{t+s} \\ - q_{t+s} I_{t+s} \left(1 + \frac{\gamma}{2} I_{t+s} \right) - q_{t+s} I_{t+s} \left(\frac{\gamma}{2} I_{t+s} \right) \end{bmatrix} \qquad [304]$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \begin{bmatrix} p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s} L_{t+s} \\ - q_{t+s} I_{t+s} \left(1 + \frac{\gamma}{2} I_{t+s} \right) - q_{t+s} I_{t+s} \left(\frac{\gamma}{2} I_{t+s} \right) \end{bmatrix}}{Q_t K_{t+1}} = 1 \qquad [305]$$

$$\frac{\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \begin{bmatrix} p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s} L_{t+s} \\ - q_{t+s} I_{t+s} \left(1 + \frac{\gamma}{2} I_{t+s} \right) \end{bmatrix}}{Q_t K_{t+1}} = 1 + \frac{\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[q_{t+s} I_{t+s} \left(\frac{\gamma}{2} I_{t+s} \right) \right]}{Q_t K_{t+1}} \qquad [081]$$

A2.7 MODÈLE AVEC COÛTS D'AJUSTEMENT : L'ÉQUILIBRE INTERTEMPOREL DU CAPITAL

La condition

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = (1+r)Q_{t-1} - (1-\delta)Q_t \qquad [066]$$

équivaut à

$$(1-\delta)Q_t = (1+r)Q_{t-1} - p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} \qquad [306]$$

$$Q_t = \frac{(1+r)}{(1-\delta)}Q_{t-1} - \frac{1}{(1-\delta)} p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} \qquad [084]$$

À l'optimum, l'investissement de la période t est poussé jusqu'au point où son coût marginal Q_t (qui croît avec I_t) satisfait cette condition.

Si on avance cette condition d'une période on obtient :

$$Q_{t+1} = \frac{(1+r)}{(1-\delta)}Q_t - \frac{1}{(1-\delta)} p_{t+1} \frac{\partial F}{\partial K_{t+1}} \qquad [307]$$

que l'on récrit comme

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)}\left\{(1-\delta)Q_{t+1} + p_{t+1}\frac{\partial F}{\partial K_{t+1}}\right\} \qquad [085]$$

En déplaçant cette équation vers l'avant pour $t+1$, $t+2$, etc., on obtient

$$Q_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left\{(1-\delta)Q_{t+2} + p_{t+2}\frac{\partial F}{\partial K_{t+2}}\right\} \qquad [308]$$

$$Q_{t+2} = \frac{1}{(1+r)}\left\{(1-\delta)Q_{t+3} + p_{t+3}\frac{\partial F}{\partial K_{t+3}}\right\} \qquad [309]$$

etc.

Puis, en faisant des substitutions successives, on trouve :

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(1-\delta)^3}{(1+r)^2}Q_{t+3} + \dfrac{(1-\delta)^2}{(1+r)^2} p_{t+3}\dfrac{\partial F}{\partial K_{t+3}} \\ + \dfrac{(1-\delta)}{(1+r)} p_{t+2}\dfrac{\partial F}{\partial K_{t+2}} \\ + p_{t+1}\dfrac{\partial F}{\partial K_{t+1}} \end{array}\right\} \qquad [086]$$

ou encore, après développement :

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)}\left\{\begin{array}{l} \frac{(1-\delta)^s}{(1+r)^{s-1}} Q_{t+s} + \frac{(1-\delta)^{s-1}}{(1+r)^{s-1}} p_{t+s} \frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} \\ \vdots \\ + \frac{(1-\delta)^2}{(1+r)^2} p_{t+3} \frac{\partial F}{\partial K_{t+3}} \\ + \frac{(1-\delta)}{(1+r)} p_{t+2} \frac{\partial F}{\partial K_{t+2}} \\ + p_{t+1} \frac{\partial F}{\partial K_{t+1}} \end{array}\right\} \qquad [310]$$

Avec la condition d'absence de bulles,

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^t Q_t = 0 \qquad [087]$$

on obtient enfin

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{s-1} p_{t+s} \frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} \qquad [088]$$

Étant donné

$$R_t = p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} \qquad [052]$$

on peut écrire

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{s-1} R_{t+s} \qquad [089]$$

ou, de façon équivalente

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{s} R_{t+s+1} \qquad [090]$$

DEUXIÈME PARTIE :
L'ÉPARGNE

Introduction

Dans la version statique du modèle d'équilibre général du Ministère des Finances du Québec (MÉGFQ), l'épargne des ménages est une proportion fixe du revenu disponible. Cette spécification est fréquente dans les MÉGC, y compris dans les modèles dynamiques financiers. De tous les modèles passés en revue par Thissen (1999)[28], il n'y a que ceux de Fargeix et Sadoulet (1994) et de Lewis (1994) où l'épargne soit fonction du taux d'intérêt. Dans tous les autres, l'épargne est une fraction fixe du revenu : les taux d'intérêt n'y affectent que la répartition du portefeuille. Il en est de même dans les modèles d'Agénor (2003), Bchir *et al.* (2002) et Decreux (1999).

Le modèle de Collange (1993) se distingue en ce que l'épargne est une proportion fixe, non pas du seul revenu, mais plutôt de la différence entre le revenu disponible et le gain sur la richesse dû à la réévaluation de la richesse antérieure. Si l'inflation est positive, la richesse est dévaluée, le gain sur la richesse est négatif et les ménages accroissent leur épargne de manière à compenser en partie la diminution de leur richesse réelle.

Jung et Thorbecke (2001) écrivent : « Savings are determined by income, and investments by the interest rate (in the savings equation in the model we assume that savings are insensitive to changes in the interest rate, consistent with the observed trends in the two economies) ». Pourtant, dans leur équation (38), à l'annexe II, l'épargne est liée au taux d'intérêt par une fonction à élasticité constante :

$$SH_h = s_h \left(1+r\right)^{\beta_{sh}} YD_h \qquad [311]$$

où

SH_h est l'épargne du ménage h;

s_h est la propension marginale à épargner du ménage h;

r est le taux d'intérêt;

YD_h est le revenu disponible du ménage h;

β_h est le paramètre d'élasticité de l'épargne du ménage h.

---

28 Il s'agit des modèles suivants : Feltenstein (1980, 1984, 1995), Bourguignon, Branson et de Melo (1989, 1992), Rosensweig et Taylor (1990), Easterly (1990), Fargeix et Sadoulet (1990, 1994) Lewis (1992, 1994), Decaluwé et Nsengiyumva (1994), Souissi et Decaluwé (1997), Yeldan (1997), Vos (1998) et Naastepad (1998). Mentionnons aussi Pereira et Shoven (1988), qui ont passé en revue 11 modèles dynamiques; mais ce sont des modèles dynamiques intertemporels (du moins en ce qui concerne le comportement du consommateur), plutôt que des modèles dynamiques séquentiels du type étudié ici.

Il faut croire que Jung et Thorbecke ont fixé la valeur du paramètre β_h à zéro, auquel cas l'épargne est proportionnelle au revenu disponible. De toute façon, l'équation (38) de Jung et Thorbecke ne semble pas reposer sur des bases théoriques explicites.

Dans Mensbrugghe (1994, 2003) et dans Beghin *et al*. (1996), l'épargne des ménages est déterminée au sein d'un système linéaire de dépenses étendu (*Extended Linear Expenditure System* – ELES). Nous reviendrons sur cette forme de spécification plus loin.

Mais pourquoi vouloir s'éloigner de la spécification habituelle, où l'épargne des ménages est une proportion fixe du revenu disponible ? Nous avons plusieurs raisons de le faire. La première est que l'on observe, notamment dans la MCS sous-jacente au MÉGFQ, que certaines catégories de ménages ont des épargnes négatives. Il s'ensuit que la propension moyenne à épargner calibrée est elle aussi négative, de sorte qu'avec la spécification habituelle, une augmentation de revenu entraîne pour ces ménages une diminution de l'épargne (plus exactement, une augmentation du montant de l'épargne négative). Évidemment, cette anomalie pourrait être éliminée en remplaçant la fonction d'épargne habituelle par une fonction d'épargne avec une ordonnée à l'origine calibrée et une propension marginale (et non plus moyenne) à épargner positive, estimée économétriquement :

$$SM_{men} = SMO_{men} + \psi_{men} YDM_{men} \qquad [312]$$

où

SM_{men} est l'épargne de la catégorie de ménages *men*;

SMO_{men} est l'ordonnée à l'origine de la fonction d'épargne de la catégorie de ménages *men*;

ψ_{men} est la propension marginale à épargner de la catégorie de ménages *men*;

YDM_{men} est le revenu disponible de la catégorie de ménages *men*.

Une seconde raison de réviser la spécification de l'épargne est que, dans la formulation habituelle, l'épargne est totalement insensible au taux d'intérêt.

Un troisième motif, enfin, est la façon dont l'épargne intervient dans le coût de renonciation du loisir dans le modèle d'offre de travail endogène telle que formulée dans Decaluwé *et al.* (2005, p. 17). Là, le coût de renonciation du loisir est donné par :

$$PCTL_{l,men,rg} = (1-\psi_{men})\left[1-\left(\sum_{gvt} tytemi^{TD}_{gvt,men} + \sum_{gvt}\sum_{prr} tytemi^{TR}_{gvt,prr}\right)\right](1-TCHO_{l,rg})w_{l,rg} \qquad [313]$$

où

$PCTL_{men,l,rg}$ est le coût de renonciation du loisir correspondant à l'offre de travail de profession l par les ménages de la catégorie *men* de la région *rg*;

ψ_{men} est la propension marginale à épargner du ménage *men*;

$tytemi^{td}_{gvt,men}$ est le taux marginal d'imposition du revenu du ménage *men* par le gouvernement *gvt*;

$tytemi^{TR}_{gvt,prr}$ est le taux marginal de l'imposition implicite du revenu de travail dû à la réduction des transferts de type *prr* par le gouvernement *gvt*;

prr est l'indice qui renvoie au transferts qui sont réductibles en fonction du revenu;

$TCHO_{l,rg}$ est le taux de chômage de la catégorie professionnelle l dans la région *rg*;

$w_{l,rg}$ est le taux de salaire de la catégorie professionnelle l dans la région *rg*.

Le coût de renonciation du loisir pour le membre *l,rg* du ménage *men* est égal à l'espérance mathématique du taux de salaire de la catégorie de travail l, net de l'impôt sur le revenu et de l'épargne. Dans ce modèle, en effet, l'épargne, pas davantage que l'impôt, ne contribue à l'utilité du ménage. Force est de reconnaître qu'il s'agit là d'une hypothèse restrictive, surtout dans le contexte d'un modèle dynamique.

Le reste de cette partie du document consiste en une présentation du modèle SELES (« Super-Extended Linear Expenditure System »). Cet exposé se fait par étapes. D'abord, nous rappelons la spécification du modèle ELES classique. Puis, nous proposons une formulation du prix de la consommation future qui tient compte du rendement de l'épargne. Mais, même avec cette nouvelle définition du prix de la consommation future, le montant de l'épargne demeure insensible au taux de rendement lorsque la fonction d'utilité est celle du modèle ELES. C'est pourquoi nous introduisons une quantité minimale de consommation future dans la fonction d'utilité; l'épargne devient alors sensible au taux de rendement. La dernière étape du développement consiste à rendre l'offre de travail endogène en introduisant le loisir dans la fonction d'utilité. La dernière section, enfin, ébauche la stratégie de calibrage des paramètres du modèle.

1. Le Système Linéaire de Dépenses Étendu (*Extended Linear Expenditure System* – ELES)

Commençons par présenter de manière simplifiée le modèle ELES tel qu'appliqué par Mensbrugghe (1994, 2003) et par Beghin *et al*. (1996).

Le problème du consommateur est de maximiser une fonction d'utilité Stone-Geary, étendue pour inclure l'épargne, c'est-à-dire la consommation future :

$$\ln U = \sum_i \gamma_i \ln\left(C_i - C_i^{MIN}\right) + \gamma^F \ln\left(\frac{S}{PAF}\right) \quad [314]$$

$$\text{s.c. } \sum_i P_i\, C_i + S = YD \quad [315]$$

où

C_i est la quantité de consommation du bien *i*;

C_i^{MIN} est la consommation minimale du bien *i*;

S est l'épargne;

PAF est le prix anticipé futur, c'est-à-dire l'indice de prix approprié pour transformer l'épargne nominale *S* en consommation future réelle;

P_i est le prix du bien *i*;

YD est le revenu disponible.

Chez Mensbrugghe, comme chez Beghin *et al*., *PAF* est simplement l'indice des prix à la consommation.

Les paramètres de la fonction d'utilité respectent évidemment

$$\sum_i \gamma_i + \gamma^F = 1 \quad [316]$$

Le lagrangien du problème d'optimisation est

$$\Lambda = \sum_i \gamma_i \ln\left(C_i - C_i^{MIN}\right) + \gamma^F \ln\left(\frac{S}{PAF}\right) - \lambda\left(\sum_i P_i\, C_i + S - YD\right) \quad [317]$$

D'où, les conditions de premier ordre

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial C_i} = \frac{\gamma_i}{\left(C_i - C_i^{MIN}\right)} - \lambda P_i = 0 \text{, c'est-à-dire } \left(C_i - C_i^{MIN}\right) = \frac{\gamma_i}{\lambda\, P_i} \quad [318]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial S} = \frac{\gamma^F}{\left(\frac{S}{PAF}\right)} \frac{1}{PAF} - \lambda = \frac{\gamma^F}{S} - \lambda = 0 \text{, c'est-à-dire } \frac{\gamma^F}{S} = \lambda \qquad [319]$$

Puis, en substituant λ de [319] dans [318],

$$\left(C_i - C_i^{MIN}\right) = \frac{\gamma_i}{\lambda\ P_i} = \gamma_i \frac{S}{\gamma^F\ P_i} = S \frac{\gamma_i}{\gamma^F\ P_i} \text{, ou } C_i = C_i^{MIN} + S \frac{\gamma_i}{\gamma^F\ P_i} \qquad [320]$$

La somme sur l'ensemble des biens de l'équation de demande [320] s'écrit

$$\sum_i P_i\ C_i = \sum_i P_i\ C_i^{MIN} + \sum_i S \frac{\gamma_i}{\gamma^F} = \sum_i P_i\ C_i^{MIN} + \frac{1-\gamma^F}{\gamma^F} S \qquad [321]$$

On substitue [321] dans la contrainte budgétaire [315] :

$$YD = \sum_i P_i\ C_i + S = \sum_i P_i\ C_i^{MIN} + \frac{1-\gamma^F}{\gamma^F} S + S = \sum_i P_i\ C_i^{MIN} + \frac{1}{\gamma^F} S \qquad [322]$$

Étant donné [322] et la définition du revenu surnuméraire *CSUP*, on a

$$CSUP = YD - \sum_i P_i\ C_i^{MIN} = \frac{1}{\gamma^F} S \qquad [323]$$

En substituant [323] dans [320], on trouve les équations de demande

$$C_i = C_i^{MIN} + \gamma_i \frac{CSUP}{P_i} \qquad [324]$$

Puis, en inversant [323], on obtient la fonction d'épargne

$$S = \gamma^F\ CSUP \qquad [325]$$

L'épargne est une fraction constante du revenu surnuméraire et, comme on peut le voir en [323], ce dernier est indépendant du taux de rendement de l'épargne *r*. Il s'ensuit que l'épargne est insensible au taux de rendement.

2. Le prix de la consommation future et le taux de rendement de l'épargne

Dans le modèle ELES classique qui vient d'être énoncé, l'épargne intervient dans la fonction d'utilité comme si le consommateur achetait une quantité $\frac{S}{PAF}$ de biens qu'il entreposait (sans frais) pour l'avenir. C'est ignorer que l'épargne « fait des petits »...

Avec des anticipations stationnaires, un montant S d'épargne rapportera un revenu récurrent égal à $r \times S$, où r est le taux de rendement réel (net d'impôt) sur l'épargne. À chaque période future, ce revenu récurrent de $r \times S$ permettra de se procurer une quantité $\frac{r\,S}{PAF}$ d'un bien composite; PAF est le prix futur anticipé du bien de consommation composite (avec des anticipations stationnaires, ce prix est un indice approprié calculé à partir des prix courants, comme dans Mensbrugghe, 1994, 2003, et dans Beghin *et al*., 1996). Avec un taux d'escompte psychologique (ou taux de préférence intertemporelle) égal à f, la quantité CF de consommation future que procure un montant d'épargne S est égale à la valeur présente des volumes de consommation futurs que soutiendra ce revenu récurrent :

$$CF = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{r\,S}{(1+f)^t PAF} = \frac{r}{f}\frac{S}{PAF} \tag{326}$$

c'est-à-dire

$$S = \left(\frac{f}{r} PAF\right) CF \tag{327}$$

S est le montant de la dépense grâce à laquelle le ménage peut se procurer une consommation future de CF au prix de $\frac{f}{r}PAF$. Si l'on suppose que le taux de préférence intertemporelle f est constant, on voit que le prix de la consommation future est inversement proportionnel au taux de rendement sur l'épargne : plus le taux de rendement est élevé, moins il en coûte d'acquérir de la consommation future.

Comme dans le modèle ELES classique, toutefois, le prix de la consommation future est absent de la fonction d'épargne [325], de sorte que, en dépit du fait que ce prix soit inversement proportionnel à r, l'épargne demeure insensible au taux de rendement.

3. L'épargne sensible au taux de rendement

L'insensibilité de l'épargne au taux de rendement et au prix de la consommation future vient de ce que la fonction d'utilité Stone-Geary est simplement une Cobb-Douglas du revenu surnuméraire, une forme fonctionnelle dont l'une des caractéristiques bien connues est l'indépendance des parts budgétaires par rapport aux prix. Il s'ensuit que si l'on inclut l'épargne (la consommation future) dans la fonction d'utilité sans introduire simultanément une valeur minimum de la consommation future, sa part dans le revenu surnuméraire est constante et le montant de l'épargne est indépendant du taux de rendement.

On peut cependant rendre l'épargne sensible au taux de rendement et au prix anticipé des biens en introduisant une quantité minimale de consommation future dans la ELES. On a alors la fonction d'utilité

$$\ln U = \sum_i \gamma_i \ln\left(C_i - C_i^{MIN}\right) + \gamma^F \ln\left(CF - CF^{MIN}\right) \tag{328}$$

avec la contrainte budgétaire :

$$\sum_i P_i\ C_i + \frac{f\ PAF}{r} CF = YD \tag{329}$$

où le second terme est l'épargne définie par [327].

Le lagrangien du problème d'optimisation est

$$\Lambda = \sum_i \gamma_i \ln\left(C_i - C_i^{MIN}\right) + \gamma^F \ln\left(CF - CF^{MIN}\right) - \lambda\left(\sum_i P_i\ C_i + \frac{f\ PAF}{r} CF - YD\right) \tag{330}$$

D'où, les conditions de premier ordre

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial C_i} = \frac{\gamma_i}{\left(C_i - C_i^{MIN}\right)} - \lambda P_i = 0\text{, c'est-à-dire } \left(C_i - C_i^{MIN}\right) = \frac{\gamma_i}{\lambda\ P_i} \tag{331}$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial CF} = \frac{\gamma^F}{\left(CF - CF^{MIN}\right)} - \lambda \frac{f\ PAF}{r} = 0\text{, c'est-à-dire } \lambda = \frac{\gamma^F}{\left(\frac{f\ PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right)} \tag{332}$$

Puis, en substituant λ de [332] dans [331],

$$\left(C_i - C_i^{MIN}\right) = \frac{\gamma_i}{\lambda\ P_i} = \gamma_i \frac{\left(\frac{f\ PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right)}{\gamma^F\ P_i},$$

$$\text{ou } C_i = C_i^{MIN} + \gamma_i \frac{\left(\frac{f\ PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right)}{\gamma^F\ P_i} \tag{333}$$

La somme sur l'ensemble des biens de l'équation de demande [333] s'écrit

$$\begin{aligned}\sum_i P_i\ C_i &= \sum_i P_i\ C_i^{MIN} + \left(\sum_i \gamma_i\right) \frac{\left(\frac{f\ PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right)}{\gamma^F} \\ &= \sum_i P_i\ C_i^{MIN} + \frac{1-\gamma^F}{\gamma^F}\left(\frac{f\ PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right)\end{aligned} \tag{334}$$

On substitue [334] dans la contrainte budgétaire [329] :

$$YD = \sum_i P_i\, C_i^{MIN} + \left(\frac{f\,PAF}{r}\right) CF^{MIN} + \frac{1}{\gamma^F}\left(\frac{f\,PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right) \quad [335]$$

Démonstration :

$$YD = \sum_i P_i\, C_i + \frac{f\,PAF}{r} CF \quad [329]$$

$$YD = \left[\sum_i P_i\, C_i^{MIN} + \frac{1-\gamma^F}{\gamma^F}\left(\frac{f\,PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right)\right] + \frac{f\,PAF}{r} CF \quad [336]$$

$$\begin{aligned} YD = {} & \left[\sum_i P_i\, C_i^{MIN} + \frac{1-\gamma^F}{\gamma^F}\left(\frac{f\,PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right)\right] + \frac{f\,PAF}{r} CF \\ & - \frac{f\,PAF}{r} CF^{MIN} + \frac{f\,PAF}{r} CF^{MIN} \end{aligned} \quad [337]$$

$$\begin{aligned} YD = {} & \left[\sum_i P_i\, C_i^{MIN} + \frac{1-\gamma^F}{\gamma^F}\left(\frac{f\,PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right)\right] \\ & + \frac{f\,PAF}{r}\left(CF - CF^{MIN}\right) + \frac{f\,PAF}{r} CF^{MIN} \end{aligned} \quad [338]$$

$$YD = \sum_i P_i\, C_i^{MIN} + \left(\frac{f\,PAF}{r}\right) CF^{MIN} + \left[\frac{1-\gamma^F}{\gamma^F}\left(\frac{f\,PAF}{r}\right) + \left(\frac{f\,PAF}{r}\right)\right]\left(CF - CF^{MIN}\right) \quad [339]$$

$$YD = \sum_i P_i\, C_i^{MIN} + \left(\frac{f\,PAF}{r}\right) CF^{MIN} + \frac{1}{\gamma^F}\left(\frac{f\,PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right) \quad [335]$$

Étant donné [335] et la [re]définition du revenu surnuméraire *CSUP* en présence de consommation future minimum, on a

$$CSUP = YD - \sum_i P_i\, C_i^{MIN} - \left(\frac{f\,PAF}{r}\right) CF^{MIN} = \frac{1}{\gamma^F}\left(\frac{f\,PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right) \quad [340]$$

En substituant [340] dans [333], on trouve les équations de demande

$$C_i = C_i^{MIN} + \gamma_i \frac{CSUP}{P_i} \quad [324]$$

Puis, en inversant [340], on obtient la fonction d'épargne

$$S = \left(\frac{f\,PAF}{r}\right) CF = \left(\frac{f\,PAF}{r}\right) CF^{MIN} + \gamma^F\, CSUP \quad [341]$$

Les équations de demande de biens [324] sont formellement identiques à celles du modèle ELES classique, mais la définition de *CSUP* inclut ici une consommation future minimale CF^{MIN}, comme en témoigne [340].

La dérivée de *S* par rapport à *r* dans [341] est donnée par

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial S}{\partial\left(f\,PAF/r\right)} \frac{\partial\left(f\,PAF/r\right)}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial S}{\partial\left(f\,PAF/r\right)} \qquad [342]$$

$$\frac{\partial S}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\left[CF^{MIN} + \gamma^F \frac{\partial CSUP}{\partial\left(f\,PAF/r\right)}\right] = -\frac{1}{r^2}\left(1-\gamma^F\right)CF^{MIN} \qquad [343]$$

Quant à la dérivée de *S* par rapport à *PAF*, elle est donnée par

$$\frac{\partial S}{\partial PAF} = \frac{\partial S}{\partial\left(f\,PAF/r\right)} \frac{\partial\left(f\,PAF/r\right)}{\partial PAF} = \frac{f}{r} \frac{\partial S}{\partial\left(f\,PAF/r\right)} = \frac{f}{r}\left(1-\gamma^F\right)CF^{MIN} \qquad [344]$$

L'effet sur l'épargne d'un accroissement du rendement est positif ou négatif selon que CF^{MIN} est négatif ou positif; au contraire, l'effet d'un accroissement des prix futurs anticipés des biens est de même signe que CF^{MIN}. Autrement dit, puisque le prix de la consommation future varie en proportion inverse du taux de rendement *r*, alors qu'il est proportionnel au prix anticipé des biens, la dérivée de la demande de consommation future par rapport à son prix est de même signe que CF^{MIN}.

Notons que, puisque *r* est ici le taux de rendement net de l'impôt sur le revenu, un alourdissement de la fiscalité a pour effet, *ceteris paribus*, de diminuer le taux de rendement et, donc, d'accroître le prix de la consommation future, ce qui fait augmenter l'épargne des ménages pour qui la consommation future minimum est positive et diminuer celle des ménages pour qui la consommation future minimum est négative.

En somme, si l'on suppose que le ménage emprunte quand son revenu est bas (CF^{MIN} négatif, ce qui ne semble pas invraisemblable pour les ménages moins bien nantis), alors son épargne augmente (son endettement diminue) lorsque le taux de rendement augmente et que le prix de la consommation future diminue. Cela se produit parce que le premier terme de la fonction de demande [341], qui est négatif, diminue en valeur absolue, et que cette diminution est supérieure en valeur absolue à la diminution du second terme, positif : la ponction sur l'épargne que constitue l'emprunt « de base », c'est-à-dire la valeur absolue de $\left(\frac{f\ PAF}{r}\right) CF^{MIN}$, diminue, ce qui, simultanément, réduit d'autant le revenu surnuméraire *CSUP*; mais le premier effet domine le second, puisque le coefficient de *CSUP* dans [341], γ^F, est inférieur à 1.

À l'inverse, si l'on suppose que le ménage est suffisamment riche pour ne pas avoir besoin d'emprunter, même lorsque son revenu est bas, alors le coût de la consommation future minimum $\left(\frac{f\ PAF}{r}\right) CF^{MIN}$ diminue et cela n'est pas compensé par l'augmentation de l'épargne discrétionnaire $\gamma^F\ CSUP$.

On peut s'interroger sur la signification d'un niveau minimum négatif de consommation future. Mais rappelons que la consommation minimum d'un bien dans la fonction d'utilité Stone-Geary ne doit pas s'interpréter littéralement, comme un « minimum vital »; elle est plutôt une quantité en-deçà de laquelle la consommation de ce bien ne peut pas générer d'utilité. Dans le cas de la consommation future, il n'est pas invraisemblable qu'un ménage qui doit emprunter pour vivre commence à éprouver une certaine satisfaction (utilité positive) lorsque ses emprunts se situent en-dessous un certain seuil : en d'autres mots, même si l'épargne est négative et que la consommation future est sacrifiée au présent, un programme où le sacrifice de consommation future est inférieur à un certain seuil génère néanmoins de l'utilité.

4. Le modèle SELES : une épargne sensible au taux de rendement avec offre de travail endogène

Dans le modèle ELES modifié que nous avons présenté jusqu'à maintenant, l'offre de travail n'est pas endogène. Complétons notre modèle schématique en introduisant le loisir dans la fonction d'utilité.

Soit donc la fonction d'utilité à maximiser

$$\ln U = \sum_i \gamma_i \ln\left(C_i - C_i^{MIN}\right) + \gamma^L \ln\left(L - L^{MIN}\right) + \gamma^F \ln\left(CF - CF^{MIN}\right) \qquad [345]$$

sous la contrainte budgétaire

$$\sum_i P_i\, C_i + w\, L + PF\ CF = y + w\ LS^{MAX} \qquad [346]$$

où

L est la consommation de loisir;

L^{MIN} est la consommation minimum de loisir;

w est le prix du loisir (taux de salaire, net d'impôt);

$PF = \frac{f}{r} PAF$ est le prix de la consommation future;

y est le revenu disponible hors travail;

LS^{MAX} est le temps de travail maximum.

Les paramètres de la fonction d'utilité respectent

$$\sum_i \gamma_i + \gamma^L + \gamma^F = 1 \tag{347}$$

Naturellement, l'épargne est donnée par

$$S = PF\ CF = \left(\frac{f}{r} PAF\right) CF \tag{348}$$

Le lagrangien du problème d'optimisation est

$$\begin{aligned}\Lambda = &\sum_i \gamma_i \ln\left(C_i - C_i^{MIN}\right) + \gamma^L \ln\left(L - L^{MIN}\right) + \gamma^F \ln\left(CF - CF^{MIN}\right) \\ &- \lambda\left(\sum_i P_i\, C_i + w\, L + PF\ CF - y - w\ LS^{MAX}\right)\end{aligned} \tag{349}$$

On définit le revenu surnuméraire **intégral** tel qu'il se définit lorsque $CF^{MIN} \neq 0$:

$$CSUPINT = y + w\ LS^{MAX} - \sum_i P_i\, C_i^{MIN} - w\, L^{MIN} - PF\ CF^{MIN} \tag{350}$$

Les équations de demande s'écrivent

$$P_i \left(C_i - C_i^{MIN}\right) = \gamma_i\, CSUPINT \tag{351}$$

$$PF\left(CF - CF^{MIN}\right) = \gamma^F\ CSUPINT \tag{352}$$

$$w\left(L - L^{MIN}\right) = \gamma^L\, CSUPINT \tag{353}$$

(voir les détails à l'annexe B).

L'offre de travail LS est alors donnée par :

$$LS = LS^{MAX} - L = LS^{MAX} - L^{MIN} - \gamma^L \frac{CSUPINT}{w} \tag{354}$$

On définit le paramètre

$$MAXHEURES = LS^{MAX} - L^{MIN} \qquad [355]$$

et on reformule

$$LS = LS^{MAX} - L = MAXHEURES - \gamma^{L} \frac{CSUPINT}{w} \qquad [356]$$

Notons également que le revenu surnuméraire intégral [350] s'écrit, en termes de *MAXHEURES*,

$$CSUPINT = y + w\ MAXHEURES - \sum_{i} P_i\, C_i^{MIN} - PF\ CF^{MIN} \qquad [357]$$

Il est donc parfaitement possible que l'épargne soit sensible au taux de rendement, avec une offre de travail endogène.

5. Résumé et considérations relatives au calibrage

Dans de nombreux MÉGC, l'épargne est simplement proportionnelle au revenu disponible. Dans le Système Linéaire de Dépenses Étendu (*Extended Linear Expenditure System* – ELES), appliqué par Mensbrugghe (1994, 2003) et par Beghin *et al*. (1996), l'épargne contribue à l'utilité du ménage, mais elle n'en demeure pas moins indépendante du taux de rendement.

La relation entre l'épargne et la consommation future réelle dépend des prix anticipés des biens de consommation. Mais on peut reprocher aux auteurs mentionnés de ne pas tenir compte du fait que le prix de la consommation future dépend aussi du rendement de l'épargne : plus élevé est le taux de rendement, moins élevé est le montant à épargner pour un volume donné de consommation future. Toutefois, même en formulant le prix de la consommation future de manière à ce qu'il tienne compte du rendement de l'épargne, celle-ci demeure insensible au taux d'intérêt.

On peut cependant modifier le modèle ELES de façon à rendre l'épargne sensible au taux d'intérêt. Il suffit pour cela de supposer qu'il y a une quantité minimum de consommation future, comme il y a dans le système linéaire de dépenses une consommation minimum de chacun des biens. Cette spécification permet en outre de représenter la réalité de certaines catégories de ménages avec une épargne négative. Elle est aussi en accord avec l'idée qu'en-deçà d'un certain seuil de revenu, les ménages auront tendance à s'endetter ou à liquider une partie de leur patrimoine.

On peut évidemment s'interroger sur la possibilité de calibrer les paramètres du modèle SELES. La stratégie de calibrage comporte 4 étapes :

1. détermination de la valeur de la propension marginale à consommer du loisir γ^L;
2. estimation économétrique de la propension marginale à épargner γ^F;
3. calibrage des paramètres des fonctions de demande de biens de consommation courante;
4. calibrage des paramètres LS^{MAX} et CF^{MIN}.

Connaissant les valeurs du revenu total disponible et du revenu de travail dans la MCS, on peut déterminer la valeur du paramètre γ^L à partir d'une valeur exogène retenue pour l'élasticité-revenu de l'offre de travail (généralement tirée d'une revue des écrits).

Pour ce qui est de la propension marginale à épargner γ^F, l'équation [341] peut se ramener à une relation de la forme

Épargne = Constante + $b \times$ Revenu disponible

Si l'on fait l'hypothèse que les paramètres de cette relation sont identiques pour les ménages d'une même catégorie, on peut en faire une estimation économétrique au moyen de micro-données. En principe, on pourrait aussi obtenir la valeur de la constante de la fonction d'épargne de chaque catégorie de ménages en multipliant la valeur de la constante estimée au moyen de micro-données par le nombre de ménages de la catégorie. En pratique toutefois, il est fort peu probable que la fonction d'épargne ainsi obtenue soit cohérente avec les données de la MCS. Il faudra donc calibrer PF et CF^{MIN}, après avoir estimé γ^F, en inversant la fonction d'épargne [341].

Une fois déterminées les valeurs de γ^L et γ^F, on peut, moyennant quelques manipulations, ramener les équations de demande de biens à leur forme classique LES. La procédure de calibrage est décrite par Annabi *et al.* (2006).

Enfin, le paramètre LS^{MAX} est calibré à partir de la fonction d'offre de travail [356], dont tous les autres éléments ont à ce stade-ci des valeurs connues, étant donné [357][29].

---

[29] Voir Annabi (2003).

Références de la deuxième partie

Agénor, P-R. (2003), The Mini-Integrated Macroeconomic Model for Poverty Analysis. The World Bank. Working Paper No 3067 http://econ.worldbank.org/files/27033_wps3067.pdf

Annabi, Nabil, (2003) *Modeling Labor Markets in CGE models : Endogenous labor supply, unions, and efficiency wage*, PEP-MPIA Training Material. http://www.pep-net.org/

Annabi, Nabil, John Cockburn et Bernard Decaluwé (2006) *Functional forms and parametrization of CGE models*, PEP-MPIA Working Paper 2006-04. http://www.pep-net.org/

Bchir, Mohamed Hedi, Yvan Decreux, Jean-Louis Guérin et Sébastien Jean (2002) « MIRAGE, un modèle d'équilibre général calculable pour l'évaluation des politiques commerciales », *Économie internationale*, 89-90, p. 109-153.
Version anglaise : http://www.cepii.fr/anglaisgraph/workpap/pdf/2002/wp02-17.pdf
Version française :
http://www.cepii.fr/francgraph/publications/ecointern/rev8990/rev8990mirage.pdf

Beghin, J., Dessus, S., Roland, H. D. et Mensbrugghe, D.V.D. (1996), General Equilibrium Modelling of Trade and The Environment. OECD, Technical Paper No. 116. http://www.oecd.org/pdf/M00006000/M00006067.pdf

Collange, Gérard (1993) *Un modèle de l'économie ivoirienne. Vol. 1: Synthèse et présentation économique*, CERDI.

Decaluwé, Bernard, André Lemelin, David Bahan et Nabil Annabi (2005) « Offre de travail endogène et mobilité du capital dans un MEGC bi-régional : la version statique du modèle d'équilibre général calculable du Ministère des Finances du Québec », texte d'une conférence donnée à Séville, lors de l'atelier international *The State-of-the-Art in Regional Modeling*, 21-23 octobre 2004, co-organisé par le Global Economic Modeling Network (ECOMOD) et la Fundación Centro de Estudio Andaluces (centrA), Ministère des Finances du Québec, collection *Feuille d'argent*, Travaux de recherche 2005-001, 62 pages.
http://www.finances.gouv.qc.ca/documents/feuille/fr/2005_001.pdf

Decreux, Yvan (1999) *Dynamique de la distribution du revenu suite à l'ouverture commerciale de la Tunisie*, Document de travail DT/99/05, DIAL.

Fargeix, A., et E. Sadoulet (1994) « A Financial Computable General Equilibrium Model for the Analysis of Stabilisation Programs », chapitre 4 dans Mercenier, Jean, et Srinivasan, T. N. (1994) *Applied general equilibrium and economic development: present achievements and future trends*, University of Michigan Press.

Jung, H.S. et Thorbecke, E.(2001) The Impact of Public Education Expenditure on Human Capital, Growth, and Poverty in Tanzania and Zambia: A General Equilibrium Approach. International Monetary Fund. IMF Working Paper WP/01/106
http://www.worldbank.org/wbi/macroeconomics/modeling/IMMPA-html/Jung-Thorbecke01.pdf

Lewis, J. (1992) « Financial repression and liberalization in a general equilibrium model with financial markets », *Journal of Policy Modeling* 14: 135–166.

Lewis, J. (1994) « Macroeconomic stabilization and adjustment policies in a general equilibrium models with financial markets: Turkey », dans J. Mercenier et T. Srinivasan (dir.), *Applied General Equilibrium and Economic Development : present achievements and future trends*, The University of Michigan Press, Michigan, pp. 101–136.

Mensbrugghe, D.V.D. (2003), « A simple dynamic model with vintage capital », Development Prospects Group, The World Bank, March 4.

Mensbrugghe, D.V.D. (2003), LINKAGE. Technical Reference Document, World Bank. http://www.worldbank.org/prospects/pubs/TechRef.pdf

Mensbrugghe, D.V.D. (1994), GREEN: The Reference Manual. OECD Technical Paper No.143.

Pereira, Alfredo M. et John B. Shoven (1988) « Survey of dynamic computational general equilibrium models for tax policy evaluation », *Journal of Policy Modeling*, 10(3), pp. 401-435.

Thissen, Mark (1999) « Financial CGE models : Two decades of research », SOM research memorandum 99C02, SOM (Systems, Organizations and Management), Reijksuniversiteit Groningen, Groningen, juin.

Annexe B : Développement des fonctions de demande du modèle SELES

Soit donc la fonction d'utilité à maximiser

$$\ln U = \sum_i \gamma_i \ln\left(C_i - C_i^{MIN}\right) + \gamma^L \ln\left(L - L^{MIN}\right) + \gamma^F \ln\left(CF - CF^{MIN}\right) \qquad [345]$$

sous la contrainte budgétaire

$$\sum_i P_i\, C_i + w\, L + PF\; CF = y + w\; LS^{MAX} \qquad [346]$$

où

L est la consommation de loisir;

L^{MIN} est la consommation minimum de loisir.

w est le prix du loisir (taux de salaire, net d'impôt);

$PF = \frac{f}{r} PAF$ est le prix de la consommation future;

y est le revenu disponible hors travail;

LS^{MAX} est le temps de travail maximum.

Les paramètres de la fonction d'utilité respectent

$$\sum_i \gamma_i + \gamma^L + \gamma^F = 1 \qquad [347]$$

Naturellement, l'épargne est donnée par

$$S = PF\; CF = \left(\frac{f}{r} PAF\right) CF \qquad [348]$$

Le lagrangien du problème d'optimisation est

$$\begin{aligned}\Lambda = {} & \sum_i \gamma_i \ln\left(C_i - C_i^{MIN}\right) + \gamma^L \ln\left(L - L^{MIN}\right) + \gamma^F \ln\left(CF - CF^{MIN}\right) \\ & - \lambda\left(\sum_i P_i\, C_i + w\, L + PF\; CF - y - w\; LS^{MAX}\right)\end{aligned} \qquad [349]$$

D'où, les conditions de premier ordre

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial C_i} = \frac{\gamma_i}{\left(C_i - C_i^{MIN}\right)} - \lambda P_i = 0 \text{, c'est-à-dire } P_i\left(C_i - C_i^{MIN}\right) = \frac{\gamma_i}{\lambda} \qquad [358]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial L} = \frac{\gamma^L}{\left(L - L^{MIN}\right)} - \lambda w = 0 \text{, c'est-à-dire } w\left(L - L^{MIN}\right) = \frac{\gamma^L}{\lambda} \qquad [359]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial CF} = \frac{\gamma^F}{\left(CF - CF^{MIN}\right)} - \lambda \frac{f\ PAF}{r} = 0 \text{ , c'est-à-dire } \left(\frac{f\ PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right) = \frac{\gamma^F}{\lambda} \qquad [360]$$

auxquelles s'ajoute la contrainte budgétaire [346].

La condition [359] est équivalente à

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) \qquad [361]$$

On substitue [361] dans [358] et dans [360] et on obtient

$$P_i\left(C_i - C_i^{MIN}\right) = \frac{\gamma_i}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) \qquad [362]$$

$$\left(\frac{f\ PAF}{r}\right) CF = \left(\frac{f\ PAF}{r}\right) CF^{MIN} + \frac{\gamma^F}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) \qquad [363]$$

Étant donné [347], la somme de l'équation [362] sur l'ensemble des biens est

$$\sum_i P_i C_i = \sum_i P_i C_i^{MIN} + \frac{1}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) \sum_i \gamma_i = \frac{\left(1 - \gamma^L - \gamma^F\right)}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) \qquad [364]$$

On substitue [364] et [363] dans la contrainte budgétaire [346] et on obtient

$$\begin{aligned} y + w\ LS^{MAX} &= \sum_i P_i C_i^{MIN} + \frac{\left(1 - \gamma^L - \gamma^F\right)}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) + wL \\ &+ \left(\frac{f\ PAF}{r}\right) CF^{MIN} + \frac{\gamma^F}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) \end{aligned} \qquad [365]$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & y + w\ LS^{MAX} - \sum_i P_i C_i^{MIN} - \left(\frac{f\ PAF}{r}\right) CF^{MIN} \\ &= \frac{\left(1 - \gamma^L - \gamma^F\right)}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) + wL + \frac{\gamma^F}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) \end{aligned} \qquad [366]$$

$$\begin{aligned} & y + w\ LS^{MAX} - \sum_i P_i C_i^{MIN} - \left(\frac{f\ PAF}{r}\right) CF^{MIN} - wL^{MIN} \\ &= \frac{\left(1 - \gamma^L - \gamma^F\right)}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) + w\left(L - L^{MIN}\right) + \frac{\gamma^F}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) \end{aligned} \qquad [367]$$

$$y + w\ LS^{MAX} - \sum_i P_i C_i^{MIN} - \left(\frac{f\ PAF}{r}\right) CF^{MIN} - wL^{MIN} = \frac{1}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) \qquad [368]$$

On définit le revenu surnuméraire **intégral** tel qu'il se définit lorsque $CF^{MIN} \neq 0$:

$$CSUPINT = y + w\ LS^{MAX} - \sum_i P_i\, C_i^{MIN} - w\, L^{MIN} - PF\ CF^{MIN} \qquad [350]$$

et, étant donné [368],

$$CSUPINT = \frac{1}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) \qquad [369]$$

On substitue [369] dans [362] et [363] et on trouve les équations de demande

$$P_i\left(C_i - C_i^{MIN}\right) = \gamma_i\, CSUPINT \qquad [351]$$

$$PF\left(CF - CF^{MIN}\right) = \gamma^F\, CSUPINT \qquad [352]$$

Enfin, en inversant [369],

$$w\left(L - L^{MIN}\right) = \gamma^L\, CSUPINT \qquad [353]$$

TROISIÈME PARTIE :
LA DETTE PUBLIQUE

1. Problématique de la représentation de la dette dans un MÉGC

1.1 OBJECTIF

L'objectif de cette troisième partie est de proposer quelques réflexions sur la façon de représenter l'évolution de la dette publique dans un MÉGC dynamique séquentiel. Pour simplifier les choses, on peut considérer que la dette publique est essentiellement constituée d'obligations. Car si l'on examine la structure de la dette directe d'un gouvernement, on constate que, d'une part, les obligations proprement dites en constituent un part importante et que, d'autre part, la quasi totalité des autres éléments de passif partagent avec les obligations les caractéristiques suivantes :

- elles sont émises à une date donnée;
- elles ont une valeur nominale déterminée;
- elles portent intérêt à un taux déterminé par rapport à leur valeur nominale;
- elles ont une date d'échéance, à laquelle elles sont remboursées au détenteur par l'émetteur.

Les bons du Trésor, bien qu'ils soient techniquement de nature différente, peuvent néanmoins être représentés sous la forme d'obligations. C'est donc sous cette forme que nous proposons de représenter l'ensemble de la dette publique. La spécification recherchée devrait idéalement permettre au modèle de prendre en compte ces caractéristiques.

1.2 EXIGENCES DE BASE

S'agissant de la dette obligataire, trois phénomènes mettent en jeu la « mémoire » du modèle, c'est-à-dire l'ensemble de valeurs passées qui interviennent dans les calculs de la période courante. D'abord, le montant des intérêts à payer sur une dette obligataire dépend des valeurs nominales et des taux d'intérêts (autrement dit, de la somme des coupons) de toutes les émissions passées qui n'ont pas été remboursées. En second lieu, le montant de la dette à rembourser (ou à refinancer) dépend des valeurs nominales et des dates d'échéance de toutes les émissions passées encore en cours. Enfin, le niveau d'endettement de l'émetteur est la résultante des émissions passées, c'est-à-dire du deficit cumulé des operations courantes et d'investissement de l'État.

Des trois phénomènes évoqués ci-haut (paiement des intérêts, remboursement, niveau d'endettement), le troisième est certainement celui qui commande la plus grande attention.

D’abord, le paiement des intérêts n’est rien d’autre qu’une conséquence de l’endettement : plus le niveau d’endettement est élevé, plus les intérêts à payer grèvent le budget de l’État. Ensuite, tout émetteur qui s'endette court le risque, au-delà d'un certain niveau d'endettement, de voir sa cote de crédit abaissée, ce qui l'oblige alors à augmenter le taux d'intérêt sur ses nouvelles émissions, voire lui interdit l’accès à du nouveau financement.

Il est donc de toute première importance que soit établie dans le modèle une relation entre le niveau d’endettement et le coût des emprunts. Or pour représenter l’augmentation du coût et l’érosion de la capacité d’emprunt qu’entraîne une hausse du niveau d’endettement, il faut que le taux d’intérêt sur les nouveaux emprunts dépende du stock de la dette. Cela requiert la présence d'un actif concurrent aux obligations. Lorsque les titres de dette obligataire entrent en concurrence avec d’autres actifs, plus grand est le stock de titres de dette en circulation, plus ces titres sont dévalués, c’est-à-dire plus les taux d’intérêt sur de nouveaux emprunts sont élevés.

Cette stratégie de modélisation implique, d’abord, qu’il y ait au moins un actif concurrent et ensuite, que la demande d’actifs reflète le comportement d’allocation de portefeuille des détenteurs. En outre, c’est l’ensemble du portefeuille qui doit être mis en jeu à chaque période, et non pas seulement l’épargne nouvelle. Car si seule l’épargne nouvelle est allouée entre les nouveaux actifs couramment offerts, les prix d’équilibre des nouvelles émissions sont indépendants des stocks de titres déjà en circulation[30].

2. Revue des écrits

2.1 LE SURVOL DE THISSEN (1999)

Thissen (1999) passe en revue plusieurs MÉGC financiers : Feltenstein (1980, 1984, 1995), Bourguignon, Branson et de Melo (modèle dit « Maquette »; 1989, 1992), Rosensweig et Taylor (1990), Easterly (1990), Fargeix et Sadoulet (1990, 1994) Lewis (1992, 1994), Decaluwé et Nsengiyumva (1994), Souissi et Decaluwé (1997), Yeldan (1997), Vos (1998) et Naastepad (1998)[31].

---

[30] Ceci correspond à l’approche « flow of funds » de Robinson (1991) ou à celle de Decaluwé, Martin et Souissi (1992).

[31] Pereira et Shoven (1988) ont examiné notamment le traitement des actifs financiers et de l’épargne dans 11 modèles dynamiques. Il s’agit cependant de modèles dynamiques intertemporels (du moins pour ce qui est du comportement des consommateurs), plutôt que de modèles dynamiques séquentiels du type étudié ici.

Signalons d'abord que, depuis la publication de l'article de Robinson (1991), tous les modèles avec actifs financiers, sauf celui de Fargeix et Sadoulet (1994), sont formulés en termes des stocks d'actifs, et non des flux (dans ce dernier cas, la gestion de portefeuille ne se fait qu'à la marge, par l'allocation du flux d'épargne). La formulation en termes de stocks d'actifs est indispensable si l'on veut pouvoir prendre en compte les implications de réaménagements de portefeuille, le paiement des intérêts et les effets de richesse.

Tous les modèles examinés, sauf ceux de Feltenstein, Thissen les décrit comme des MÉGC macroéconomiques financiers (« financial macro CGE models »). À ce titre, tous ces modèles comprennent donc la monnaie parmi les actifs financiers. De plus, le secteur bancaire y est décrit et les relations entre la banque centrale, les banques commerciales et les autres agents (emprunteurs et déposants) y sont explicitées.

Dans ce survol des écrits, nous nous attachons cependant à l'objectif de représenter l'évolution de la dette publique dans un MÉGC, plutôt qu'à l'objectif plus large d'en faire un outil de simulation macroéconomique. C'est pourquoi nous ne croyons pas qu'il soit utile d'y introduire la monnaie ou l'intermédiation financière, ni qu'il soit pertinent de discuter de la formation des anticipations de court terme ou des vitesses d'ajustement des marchés des biens, des services, des facteurs ou des actifs financiers. À ce titre, une distinction très claire doit être opérée entre les objectifs des modèles macroéconomiques dynamiques et les modèles d'équilibre général. Par contre, nous avons vu qu'il faut mettre les titres de dette publique en concurrence avec d'autres actifs. C'est pourquoi nous nous intéressons particulièrement à la gestion de portefeuille et à la liste des actifs dans les modèles financiers.

Bien qu'il soit difficile de généraliser, disons que, dans la plupart des modèles, l'avoir net des ménages est ajusté pour tenir compte des gains et pertes en capital. L'avoir net est ensuite réparti entre le « capital physique » et les actifs financiers, considérés comme des substituts imparfaits les uns aux autres. La liste des actifs comprend presque toujours la monnaie, comme nous l'avons déjà mentionné. Certains modèles, comme celui de Lewis (1994) n'ont qu'un seul autre actif – en l'occurrence, des dépôts bancaires portant intérêt. La demande de monnaie est alors déterminée par une fonction de demande (aux fins de transaction) et le montant dédié à l'autre actif est résiduel. Les modèles plus élaborés ont généralement recours à une fonction d'utilité CES pour déterminer la composition du portefeuille; Easterly (1990) utilise une fonction logistique.

2.2 LE MODÈLE « MAQUETTE » DE BOURGUIGNON, BRANSON ET DE MELO (1989)

Le modèle « Maquette » de Bourguignon, Branson et de Melo (1989) est un modèle de macro-simulation destiné à quantifier les effets des politiques de stabilisation sur la répartition du revenu et de la richesse dans les pays en développement. Les actions en sont absentes, parce que les marchés boursiers sont virtuellement inexistants dans les pays concernés. Dans sa version originale, le modèle est formulé en termes de flux. Mais les versions plus récentes sont en termes des stocks d'actifs.

Le modèle distingue cinq agents et cinq actifs. Le gouvernement émet des obligations qui sont détenues par les ménages, les banques et le RdM. Les entreprises empruntent auprès des banques et du reste du monde. Le système bancaire émet la monnaie et reçoit les dépôts des ménages et des entreprises. En plus des obligations du gouvernement et des dépôts bancaires, les ménages détiennent des titres étrangers. Le système bancaire enfin possède des réserves de devises étrangères.

L'avoir des ménages est réparti en trois étapes. D'abord, une partie du portefeuille est conservé sous forme de monnaie et de dépôts bancaires; la demande de monnaie est une fonction du revenu et des taux d'intérêt. Puis, une fraction du reste va au capital physique. Le solde est enfin réparti entre obligations et titres étrangers. Dans les deux derniers cas, la répartition est déterminée par une fonction à élasticité constante du type

$$\frac{g_a}{1-g_a}=\psi\left(\frac{1+i_a}{1+i_b}\right)^{\varepsilon_a}\text{, c'est-à-dire } g_a=\frac{\psi\left(\frac{1+i_a}{1+i_b}\right)^{\varepsilon_a}}{1+\psi\left(\frac{1+i_a}{1+i_b}\right)^{\varepsilon_a}} \qquad [370]$$

où g_a est la part de l'actif a dans le partage, i_a est le taux de rendement de a et i_b, le taux de rendement de l'actif rival b. Le portefeuille d'emprunts des entreprises est déterminé de façon analogue, avec une élasticité de signe contraire.

2.3 LE MODÈLE DE ROSENSWEIG ET TAYLOR (1990)

Ce modèle distingue six agents : les ménages, les entreprises, les banques commerciales, la banque centrale, le gouvernement et le RdM.

L'avoir des ménages à la période t est constitué des éléments suivants :

- capital physique (stock d'immeubles résidentiels et capital des entreprises individuelles)

- monnaie
- dépôts bancaires
- actions des entreprises
- obligations de l'État

À chaque période, cet avoir (la richesse) s'accroît du montant de l'épargne courante. Les actifs de capital physique sont égaux à la valeur courante du stock hérité de la période précédente, auxquels s'ajoutent les investissements courants en actifs physiques. Ces derniers sont une fonction linéaire du revenu réel des ménages et du taux d'intérêt. Une fois soustraite la valeur du capital physique, le reste de l'avoir est partagé entre les quatre actifs financiers suivant le modèle qui porte maintenant le nom des auteurs.

Les ménages épargnants maximisent une fonction d'utilité CES dont les arguments sont les rendements $z_i V_i$ des actifs (bien les rendements, et non les *taux* de rendement !) :

$$U = \left[\sum_i A_i \left(z_i V_i \right)^{\rho} \right]^{\frac{1}{\rho}} \qquad [371]$$

$$\text{s.c. } \sum_i V_i = W \qquad [372]$$

où

- les A_i sont des paramètres;
- V_i est la valeur de l'actif i dans le portefeuille;
- $z_i = \frac{r_i}{\bar{r}_i}$ est le rapport du taux de rendement de l'actif i sur son taux « normal »;
- W est la valeur du portefeuille à allouer.

Le paramètre ρ est lié à l'élasticité de substitution technique par la relation $\rho = \frac{\sigma - 1}{\sigma}$.

Cette spécification traduit l'hypothèse que les *flux de revenu* provenant des différents actifs ne sont pas parfaitement substituables, alors que l'on suppose habituellement que ce sont les actifs eux-mêmes qui ne sont pas parfaitement substituables (voir plus loin le modèle de Decaluwé et Souissi, 1994).

La solution de ce problème de maximisation conduit aux fonctions de demande

$$z_i V_i = W \frac{A_i^{\sigma} z_i^{\sigma-1}}{\zeta}, \text{ où } \zeta = \left[\sum_j A_j^{\sigma} z_j^{\sigma-1} \right] \qquad [373]$$

Rosensweig et Taylor désignent ζ comme le « rendement harmonique moyen ». En fait, la moyenne pondérée de puissance p d'un ensemble de valeurs x_i est définie par

$$M_p = \left(\frac{\sum_i w_i (x_i)^p}{\sum_i w_i} \right)^{1/p} \qquad [374]$$

Dans le cas particulier où $p = -1$ et où les poids w_i sont égaux, on a une moyenne harmonique. Il est donc abusif de désigner la variable ζ comme une moyenne harmonique et nous nous abstiendrons de perpétuer cette erreur.

Le financement des investissements des entreprises est traité séparément pour chaque branche : le besoin de financement de la branche i est l'écart entre ses dépenses d'investissement et son épargne. Le taux d'investissement *net*[32] de la branche, $\frac{I_{i,t}}{K_{i,t-1}}$, est une fonction linéaire de la différence entre le taux de rendement du capital de la branche, net de la dépréciation, et le taux d'intérêt sur les prêts bancaires.

Chez Rosensweig et Taylor, le nombre d'actions émises est une fonction linéaire du besoin de financement en termes réels $\frac{DEF_i}{PK_i}$, où DEF_i est le financement requis de la branche i et PK_i, le prix du capital de la branche i. Le prix des actions est déterminé sur le marché boursier et l'entreprise obtient par emprunt le reste de son financement, c'est-à-dire l'écart entre DEF_i et ce que rapportent les nouvelles émissions d'actions. La branche (c.-à-d. la firme représentative de la branche) répartit son portefeuille d'emprunts (anciens et nouveaux) entre emprunts bancaires et emprunts à l'étranger, en minimisant un agrégat CES des coûts en intérêt, sous contrainte de ses besoins en financement. Le modèle du portefeuille d'emprunts des firmes est semblable à celui du portefeuille d'actifs financiers des ménages, sauf que les entreprises minimisent le coût de leurs emprunts alors que les ménages maximisent les rendements sur ceux-ci. Il est bien

[32] La dépréciation du capital n'apparaît pas explicitement dans le modèle. Il sied aussi de noter que la convention adoptée par Rosensweig et Taylor est que le capital utilisé pour la production courante porte l'indice de la période précédente : le capital productif utilisé à la période t est $K_{i,t-1}$.

évident que la perception des firmes et des ménages sur le degré de substituabilité entre actifs n'est pas nécessairement identique. De ce fait ce n'est pas tant la nature de l'actif qui fixe son degré de substituabilité mais bien la perception qu'en ont les émetteurs et les détenteurs.

Grosso modo, l'offre de prêts bancaires est une fonction croissante du taux d'intérêt, tandis que la demande de la part des entreprises est une fonction décroissante du taux d'intérêt : la contrainte d'égalité entre l'offre et la demande détermine le taux d'intérêt d'équilibre.

Les besoins de financement de l'État sont la somme de ses dépenses en investissement public et de ses achats de nouvelles actions des sociétés d'État, moins sa propre épargne (solde de ses opérations courantes). Les emprunts à l'étranger sont exogènes. Chez Rosensweig et Taylor, le reste du portefeuille d'emprunts, nouveaux et anciens, de l'État est réparti entre

- les obligations en circulation, dont la quantité est déterminée par la demande, leur taux de rendement étant une variable de politique économique fixée de façon exogène;
- les emprunts aux banques commerciales, une fonction linéaire des dépôts bancaires;
- les emprunts à la banque centrale, résiduels.

La quantité d'obligations gouvernementales en circulation est déterminée par la fonction de demande des ménages, le taux d'intérêt étant fixé de façon exogène. La quantité d'actions émises par les branches est déterminée par leur besoin de financement. Le montant que les ménages placent sous forme d'actions est déterminé par les taux de rendement des actions et des obligations. Le taux de rendement des actions est donné par le taux de rendement net moyen pondéré du capital. Le prix des actions est égal, en conséquence, au rapport du montant agrégé des placements boursiers des ménages sur le nombre d'actions émises par l'ensemble des branches.

2.4 LE MODÈLE IVOIRIEN DE COLLANGE (1993)

Le modèle de Collange (1993) combine le modèle de gestion de portefeuille de Rosensweig et Taylor et un modèle de gestion du passif à la Bourguignon *et al.* Collange distingue six agents : les ménages, les entreprises, les banques commerciales, la banque centrale, le gouvernement et le RdM.

L'avoir des ménages est constitué de monnaie, de dépôts bancaires et d'actifs étrangers et s'accroît à chaque période du montant de l'épargne. La quantité de monnaie détenue par les ménages est déterminée par une fonction de demande de la forme $\phi Y\, rhm^{\varepsilon}$, où ϕ est une constante, Y est le revenu et *rhm*, le soi-disant « rendement harmonique moyen » des dépôts et des actifs étrangers, avec une élasticité ε négative. Le reste du patrimoine est réparti entre les dépôts et les actifs étrangers à la Rosensweig et Taylor.

Après prise en compte de certains transferts et flux exogènes, les besoins de financement des entreprises sont égaux à la différence entre leur demande d'investissement et leur épargne. Leurs sources complémentaires de financement sont l'emprunt sur le marché intérieur et à l'étranger; la répartition entre les deux se fait au moyen d'une fonction de partage semblable à celles du modèle maquette de Bourguignon *et al*.

Les besoins de financement du secteur public sont égaux à la différence entre les investissements publics et la somme de l'épargne publique courante et des transferts reçus des entreprises (exogènes)[33]. Ces besoins se satisfont par des avances de la banque centrale (exogènes) et, soit des arriérés de paiement, soit des apports de capitaux extérieurs (l'un des deux est exogène).

Les besoins de financement des banques commerciales sont la différence entre, d'une part, les crédits aux entreprises et les réserves déposées auprès de la banque centrale et, d'autre part, les dépôts des ménages et leur propre épargne. Le solde est comblé par des emprunts à l'étranger et par le refinancement de la banque centrale, avec une fonction de répartition comme celles du modèle Maquette de Bourguignon *et al*.

Quant à la banque centrale, ou bien, si le taux de change nominal est exogène, elle équilibre ses comptes au moyen de variations des réserves de devises, ou bien l'équilibre s'obtient par l'ajustement du taux de change nominal.

Les taux d'intérêt sont tous arrimés aux taux d'intérêt étrangers, exogènes, et au taux de refinancement de l'année précédente. Dans les équations, les taux d'intérêts étrangers i_f apparaissent toujours sous la forme $(1+i_f)$ $(1+\hat{e})$, où $\hat{e}$ est identifié comme « le taux de change anticipé »; il s'agit sans doute plus exactement de la variation proportionnelle anticipée du taux de change. Dans la mesure où cette variation anticipée est liée aux changements observés du taux de change, et si l'équilibre financier est obtenu par l'ajustement du taux de change, c'est le seul canal par lequel les taux d'intérêt bougent en réponse aux tensions des marchés des actifs financiers.

---

33 Collange ne précise pas la nature de ces transferts.

2.5 LE MODÈLE DE DECALUWÉ-SOUISSI (1994) ET DE SOUISSI (1994)

Nous souscrivons aux critiques que formule Souissi (1994) à propos de la demande d'actifs dans le modèle de Rosensweig et Taylor. Suivant Souissi, le gestionnaire de portefeuille peut acquérir au début de la période t une unité de l'actif i au prix q_i, ce qui lui rapportera un revenu de placement de $r_i\, q_i$ à la fin de la période t (au début de t+1) et aura une valeur capitalisée de $\xi_i = (1+r_i)\, q_i$ à la fin de la période t (au début de t+1).

À chaque période t, chaque agent gestionnaire de portefeuille maximise la valeur capitalisée de son avoir

$$\underset{a_i}{MAX}\ VC = \sum_i \xi_i a_i \text{ , où } \xi_i = (1+r_i)q_i \qquad [375]$$

sous la contrainte[34]

$$W = A_W \left[\sum_i \delta_i a_i{}^{\beta} \right]^{\frac{1}{\beta}} \qquad [376]$$

avec l'élasticité de transformation

$$\tau = \frac{1}{1-\beta} \ (\beta > 1) \qquad [377]$$

Il est clair que la forme de la fonction d'utilité implique que la totalité du portefeuille soit réallouée à chaque période. Il s'ensuit que la richesse W est constituée de la valeur des actifs possédés à la fin de la période t–1 et de l'épargne courante.

Lorsqu'on tient compte de la contrainte comptable de richesse des ménages

$$\sum_i q_i a_i = W \qquad [378]$$

cela conduit aux fonctions de demande

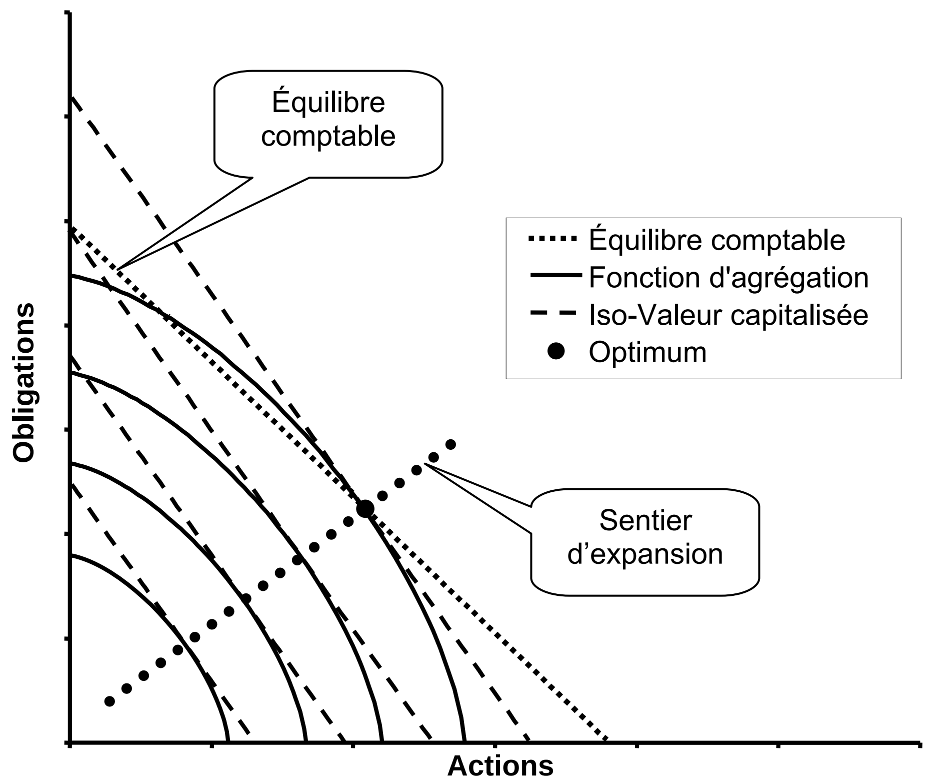
$$q_i a_i = W \frac{\delta_i{}^{\tau} q_i \xi_i{}^{-\tau}}{\sum_j \delta_j{}^{\tau} q_j \xi_j{}^{-\tau}} \qquad [379]$$

---

[34] Dans son énoncé du modèle, Souissi présente cette contrainte comme la contrainte de richesse. Mais le facteur A_W de cette équation n'est pas un paramètre : c'est une variable dont la valeur dépend de la contrainte comptable de richesse [378], énoncée plus loin. C'est pourquoi nous préférons parler de contrainte de diversification. Cet aspect du modèle Decaluwé-Souissi est discuté de façon approfondie dans Lemelin (2005), notamment à l'annexe 2.

La figure suivante illustre le modèle d'allocation de portefeuille de Decaluwé-Souissi.

Figure 1 – Allocation de portefeuille des ménages



Le point d'équilibre d'allocation du portefeuille se trouve à l'intersection du sentier d'expansion et de la contrainte d'équilibre comptable. Le sentier d'expansion est formé de l'ensemble des optima; ceux-ci sont caractérisés par l'égalité entre le taux marginal de transformation de la contrainte de diversification et la pente de la droite d'iso-valeur capitalisée (dont l'équation est donnée par [375] avec une valeur constante de *VC*).

2.6 Le modèle de Lemelin (2005, 2007)

Lemelin (2005, 2007) propose un modèle qui permet de traiter le service de la dette (paiement des intérêts et remboursement de la dette arrivée à échéance) et le niveau d'endettement, tout en maintenant à un niveau acceptable les exigences imposées à la mémoire du modèle.

La formulation proposée par Lemelin (2005) ne se veut pas opérationnelle telle quelle. L'objectif poursuivi est plutôt d'exposer sous une forme minimaliste le principe général de la spécification. Il s'agit d'un modèle sans monnaie, qui ne peut donc pas être considéré comme un modèle financier. De plus, il ne fait aucune place à l'intermédiation financière. Enfin, l'éventail des actifs y est réduit à sa plus simple expression.

Le modèle minimaliste de Lemelin (2005) présente donc une économie à trois agents : les ménages, les entreprises et l'État :

- L'État émet des obligations pour financer son déficit courant et les investissements publics.
- Les entreprises émettent des actions pour financer leurs investissements.
- Les ménages détiennent un portefeuille des deux types d'actifs, actions et obligations.

Les obligations sont en concurrence avec une autre catégorie d'actifs, les actions, de sorte que le rendement exigé par les acheteurs de nouvelles obligations augmente à mesure qu'augmente la dette obligataire par rapport au stock d'actions en circulation.

Des restrictions imposées à la structure de maturité des obligations permettent de définir un compromis raisonnable entre le réalisme de la représentation de l'évolution de la dette obligataire et le poids des valeurs passées des variables que le modèle doit conserver en mémoire.

Dans le modèle proposé, l'État emprunteur rembourse les obligations arrivées à échéance et paie les intérêts sur la dette en cours. Le prix des obligations émises à différents moments avec des échéances différentes sont cohérentes avec un équilibre d'arbitrage. L'offre de nouvelles obligations et actions est déterminé par les besoins d'emprunt de l'État et des entreprises. La demande d'actifs reflète le comportement rationnel des ménages gestionnaires de portefeuille, conformément à l'approche Decaluwé-Souissi. Lemelin apporte cependant une modification au modèle Decaluwé-Souissi : la contrainte de diversification est énoncée en termes de la *valeur* des différents actifs du portefeuille. La contrainte de diversification devient alors

$$W = A_W \left[\sum_i \delta_i \left(q_i a_i \right)^{\beta} \right]^{\frac{1}{\beta}} \qquad [379.1]$$

On peut alors reformuler l'ensemble du modèle en termes des valeurs des actifs. Soit

$$b_i = q_i \, a_i \qquad [379.2]$$

La fonction objectif de Decaluwé-Souissi s'écrit

$$\underset{b_i}{MAX}\ VC = \sum_i \left(1 + r_i\right) b_i \qquad [379.3]$$

sous contrainte de

$$W = A_w \left[\sum_i \delta_i b_i^{\beta} \right]^{\frac{1}{\beta}} \qquad [379.4]$$

et de l'identité comptable de la richesse

$$\sum_i b_i = W \qquad [379.5]$$

Cela conduit à des fonctions de demande de la forme

$$b_i = W \frac{\delta_i^{\tau} \left(1 + r_i\right)^{-\tau}}{\sum_j \delta_j^{\tau} \left(1 + r_j\right)^{-\tau}} \qquad [379.6]$$

Le modèle est présenté en deux versions, un modèle de base et un modèle qui, bien que dépourvu de monnaie, incorpore un mécanisme d'érosion de la valeur réelle des obligations sous l'effet de l'inflation.

L'applicabilité du principe de modélisation exposé dans Lemelin (2005) est démontrée dans Lemelin (2007), au moyen du modèle EXTER-D, un MÉGC dynamique séquentiel de petite taille basé sur des données fictives.

Références de la troisième partie

Bourguignon, F., W. H. Branson et J. de Melo (1989) *Adjustment and income distribution: a counterfactual analysis*, National Bureau of Economic Research, Cambridge.

Bourguignon, F., W. H. Branson et J. de Melo (1992) « Adjustment and income distribution : a micromacro model for counterfactual analysis », *Journal of Development Economics* 38: 17–39.

Collange, Gérard (1993) *Un modèle de l'économie ivoirienne. Vol. 1: Synthèse et présentation économique*, CERDI.

Decaluwé, Bernard, André Martens, et Luc Savard (2001) *La politique économique du développement et les modèles d'équilibre général calculable*, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal.

Decaluwé, Bernard, Marie-Claude Martin, et Mokhtar Souissi (1993) *École PARADI de modélisation de politiques économiques de développement. Vol. 3 – Les modèles calculables d'équilibre général : les aspects financiers*, Université Laval, Québec.

Decaluwé, Bernard et F. Nsengiyumva (1994) « Policy impact under credit rationing : A real and financial CGE of Rwanda », *Journal of African Economies* 3: 263–308.

Decaluwé, Bernard, et Mokhtar Souissi (1994) *Libéralisation financière en Tunisie : une étude rétrospective et prospective*, CRÉFA, Université Laval.

Decreux, Yvan (1999) *Dynamique de la distribution du revenu suite à l'ouverture commerciale de la Tunisie*, Document de travail DT/99/05, DIAL.

Easterly, W. (1990) « Portfolio effects in a CGE model: Devaluation in a dollarized economy », dans L. Taylor (dir.), *Socially relevant policy analysis: structuralist computable general equilibrium models for the developing world*, MIT press, Cambridge, pp. 269–301.

Fargeix, A., et E. Sadoulet (1994) « A Financial Computable General Equilibrium Model for the Analysis of Stabilisation Programs », chapitre 4 dans Jean Mercenier et T. N. Srinivasan (1994) *Applied general equilibrium and economic development: present achievements and future trends*, University of Michigan Press.

Feltenstein, A. (1980) *A general equilibrium approach to the analysis of trade restrictions, with an application to Argentina*, IMF Staff Papers 27: 749–784.

Feltenstein, A. (1984) « Money and bonds in a disaggregated open economy », dans H. Scarf et J. Shoven (dir.), *Applied general equilibrium analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 209–242.

Feltenstein, A. et A. Shah (1995) « General equilibrium effects of investment incentives in Mexico », *Journal of Development Economics* 46: 253–269.

Lemelin, André (2007), « Bond indebtedness in a recursive dynamic CGE model », CIRPÉE (Centre Interuniversitaire sur le Risque, les Politiques Économiques et l'Emploi), Cahier de recherche 07-10, mars.
http://132.203.59.36/CIRPEE/indexbase.htm
http://ssrn.com/abstract=984310

Lemelin, André (2005) « La dette obligataire dans un MÉGC dynamique séquentiel », CIRPÉE (Centre Interuniversitaire sur le Risque, les Politiques Économiques et l'Emploi), Cahier de recherche 05-05, version révisée, mai.

http://132.203.59.36/CIRPEE/indexbase.htm
http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=690266

Lewis, J. (1992) « Financial repression and liberalization in a general equilibrium model with financial markets », *Journal of Policy Modeling* 14: 135–166.

Lewis, J. (1994) « Macroeconomic stabilization and adjustment policies in a general equilibrium models with financial markets: Turkey », dans J. Mercenier et T. Srinivasan (dir.), *Applied General Equilibrium and Economic Development : present achievements and future trends*, The University of Michigan Press, Michigan, pp. 101–136.

Naastepad, C. (1998) *The Public Sector Budget and Macroeconomic Performance : A real financial CGE analysis with portfolio choice with reference to India*, Thesis publishers, Amsterdam.

Pereira, Alfredo M. et John B. Shoven (1988) « Survey of dynamic computational general equilibrium models for tax policy evaluation », *Journal of Policy Modeling*, 10(3), pp. 401-435.

Robinson, Sherman (1991) « Macroeconomics, financial variables, and computable general equilibrium models », *World Development* 19 : 1509-1525.

Rosensweig, Jeffrey A., et Lance Taylor (1990) « Devaluation, capital flows and crowding-out : A CGE model with portfolio choice for Thailand », Chap. 11 dans Taylor, Lance (1990) *Socially relevant policy analysis : structuralist computable general equilibrium models for the developing world*, MIT Press, Cambridge, Mass.

Souissi, Mokhtar (1994) *Libéralisation financière, structure du capital et investissement: un MCEG avec actifs financiers appliqué à la Tunisie*, thèse de doctorat, Université Laval, Québec.

Souissi, Mokhtar et Bernard Decaluwé (1997), « Financial deregulation in Tunisia : A prospective end retrospective analysis », CRÉFA, Université Laval, mai.

Thissen, Mark (1999) « Financial CGE models : Two decades of research », SOM research memorandum 99C02, SOM (Systems, Organizations and Management), Reijksuniversiteit Groningen, Groningen, juin.

Vos, R. (1998) « Aid flows and ”dutch disease” in a general equilibrium framework for Pakistan », *Journal of Policy Modeling* 20: 77–109.

Yeldan, A. (1997) « Financial liberalization and ¿scal repression in turkey: Policy analysis in a CGE model with financial markets », *Journal of Policy Modeling* 19: 79–117.

COMPENDIUM DES EXPRESSIONS MATHÉMATIQUES

$$K_{i,t+1} = I_{i,t} + (1-\delta_i)K_{i,t}$$ [001]

$$p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t$$ [002]

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t$$ [003]

$$MAX\ V = \int_0^\infty e^{-rt}\left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t\right]dt$$ [004]

$$K_0 = \overline{K}_0$$ [005]

$$p_t \frac{\partial F}{\partial L_t} = w_t$$ [006]

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = q_t\left[r + \delta - \frac{\dot{q}_t}{q_t}\right]$$ [007]

$$\pi_t = \frac{\dot{q}_t}{q_t}$$ [008]

$$u_t = q_t\,(r + \delta - \pi_t)$$ [009]

$$MAX\ \left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - u_t K_t\right]$$ [010]

$$K_t = \overline{K}_0 + \int_0^t \dot{K}_\tau\, d\tau = \overline{K}_0 + \int_0^t (I_\tau - \delta K_\tau)\, d\tau$$ [011]

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = u_t$$ [012]

$$\Delta_t K = K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t$$ [013]

$$I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t$$ [014]

$$MAX\ V = \sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^t}\left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t\left(K_{t+1} - (1-\delta)K_t\right)\right]$$ [015]

$$p_t \frac{\partial F}{\partial L_t} = w$$ [016]

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = (1+r)\,q_{t-1} - (1-\delta)\,q_t$$ [017]

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = rq_{t-1} + \delta q_t - (q_t - q_{t-1}) \tag{018}$$

$$\pi_t = \frac{(q_t - q_{t-1})}{q_{t-1}} \tag{019}$$

$$(q_t - q_{t-1}) = \frac{(q_t - q_{t-1})}{q_{t-1}} q_{t-1} = \pi_t q_{t-1} \tag{020}$$

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = rq_{t-1} + \delta q_t - \pi_t q_{t-1} = (r - \pi_t) q_{t-1} + \delta q_t \tag{021}$$

$$u_t = (r - \pi_t) q_{t-1} + \delta q_t \tag{022}$$

$$p\,\Delta K = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho} \right)^t E(t) \tag{023}$$

$$p\,\Delta K = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho} \right)^t E(t) = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho} \right)^t \overline{E} = \frac{1}{\rho} \overline{E} \tag{024}$$

$$MV = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r_K} \right)^t E(t) \tag{025}$$

$$MV = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r_K} \right)^t E(t) = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r_K} \right)^t \overline{E} = \frac{1}{r_K} \overline{E} \tag{026}$$

$$q = \frac{MV}{p\,\Delta K} \tag{027}$$

$$q = \frac{MV}{p\,\Delta K} = \frac{\left(\overline{E} / r_K \right)}{\left(\overline{E} / \rho \right)} = \frac{\left(1 / r_K \right)}{\left(1 / \rho \right)} = \frac{\rho}{r_K} \tag{028}$$

$$q_t K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)} \left[(1-\delta) q_{t+1} K_{t+1} + p_{t+1} \frac{\partial F}{\partial K_{t+1}} K_{t+1} \right] \tag{029}$$

$$(1-\delta) K_t = K_{t+1} - I_t \tag{030}$$

$$q_t K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)} \left(p_{t+1} \frac{\partial F}{\partial K_{t+1}} K_{t+1} - q_{t+1} I_{t+1} + q_{t+1} K_{t+2} \right) \tag{031}$$

$$q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[p_{t+s} \frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} K_{t+s} - q_{t+s} I_{t+s} \right] + \lim_{s \to \infty} \left(\frac{1}{(1+r)^s} q_{t+s} K_{t+s+1} \right) \tag{032}$$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{(1+r)^s} q_{t+s} K_{t+s+1} = 0 \qquad [033]$$

$$MAX\ V = \sum_{t=0}^{T} \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t \left(K_{t+1} - (1-\delta) K_t \right) \right] \qquad [034]$$

$$MAX\ V = \sum_{t=0}^{T} \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t \right] - \sum_{t=0}^{T} \frac{1}{(1+r)^t} q_t K_{t+1} + \sum_{t=0}^{T} \frac{1}{(1+r)^t} q_t (1-\delta) K_t \qquad [035]$$

$$\frac{1}{(1+r)^T} q_T K_{T+1} > 0 \qquad [036]$$

$$\frac{1}{(1+r)^T} q_T K_{T+1} = 0 \qquad [037]$$

$$\underset{T\to\infty}{Lim} \frac{1}{(1+r)^T} q_T K_{T+1} = 0 \qquad [038]$$

$$q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[p_{t+s} \frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} K_{t+s} - q_{t+s} I_{t+s} \right] \qquad [039]$$

$$F(K_t, L_t) = \frac{\partial F}{\partial K_t} K_t + \frac{\partial F}{\partial L_t} L_t \qquad [040]$$

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} K_t = p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t \qquad [041]$$

$$q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s} L_{t+s} - q_{t+s} I_{t+s} \right] \qquad [042]$$

$$\frac{\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s} L_{t+s} - q_{t+s} I_{t+s} \right]}{q_t K_{t+1}} = 1 \qquad [043]$$

$$q_t = \frac{1}{(1+r)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{(1-\delta)^3}{(1+r)^2} q_{t+3} + \frac{(1-\delta)^2}{(1+r)^2} p_{t+3} \frac{\partial F}{\partial K_{t+3}} \\ + \frac{(1-\delta)}{(1+r)} p_{t+2} \frac{\partial F}{\partial K_{t+2}} \\ + p_{t+1} \frac{\partial F}{\partial K_{t+1}} \end{array} \right\} \qquad [044]$$

$$q_t = \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^{\theta} q_{\theta} + \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=1}^{\theta} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^{s-1} p_{t+s} \frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} \qquad [045]$$

$$q_t = \lim_{\theta\to\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{\theta} q_\theta + \frac{1}{(1+r)}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{s-1} p_{t+s}\frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} \quad [046]$$

$$\frac{1+r}{1-\delta} - 1 = \frac{r+\delta}{1-\delta} \quad [047]$$

$$\lim_{\theta\to\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{\theta} q_\theta > 0 \quad [048]$$

$$q_t > \frac{1}{(1+r)}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{s-1} p_{t+s}\frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} \quad [049]$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{t} q_t = 0 \quad [050]$$

$$q_t = \frac{1}{(1+r)}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{s-1} p_{t+s}\frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} \quad [051]$$

$$R_t = p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} \quad [052]$$

$$q_t = \frac{1}{(1+r)}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{s} R_{t+s+1} \quad [053]$$

$$\tilde{R}_{t+s} = R_t, \forall s \geq 0 \quad [054]$$

$$R_t = (r+\delta)q_t \quad [055]$$

$$\bar{u}_t = (r+\delta)q_t \quad [056]$$

$$\pi_t = \frac{(q_t - q_{t-1})}{q_{t-1}} = 0 \text{, ce qui implique } q_t = q_{t-1} \quad [057]$$

$$R_t = (r+\delta)q_t = \bar{u}_t \quad [058]$$

$$C'(I_t) > ou < 0 \Leftrightarrow I_t > ou < 0 \quad [059]$$

$$C(0) = 0 \quad [060]$$

$$C''(I_t) > 0 \quad [061]$$

$$C(I_t) = q_t \frac{\gamma}{2} I_t^{2} \quad [062]$$

$$MAX\ V = \sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^t}\left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t - C(I_t)\right] \quad [063]$$

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} - (1+r)q_{t-1}\left(1+\gamma I_{t-1}\right) + q_t\left(1+\gamma I_t\right)(1-\delta) = 0 \qquad [064]$$

$$Q_t = \frac{\partial}{\partial I_t}\left[q_t I_t\left(1+\frac{\gamma}{2} I_t\right)\right] = q_t\left(1+\gamma I_t\right) \qquad [065]$$

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = (1+r)Q_{t-1} - (1-\delta)Q_t \qquad [066]$$

$$\Pi_t = \frac{(Q_t - Q_{t-1})}{Q_{t-1}} \qquad [067]$$

$$(Q_t - Q_{t-1}) = \frac{(Q_t - Q_{t-1})}{Q_{t-1}} Q_{t-1} = \Pi_t Q_{t-1} \qquad [068]$$

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = r\,Q_{t-1} + \delta Q_t - (Q_t - Q_{t-1}) \qquad [069]$$

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = (r - \Pi_t)Q_{t-1} + \delta Q_t \qquad [070]$$

$$U_t = (r - \Pi_t)Q_{t-1} + \delta Q_t \qquad [071]$$

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = U_t \qquad [072]$$

$$Q_t K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left[(1-\delta)Q_{t+1}K_{t+1} + R_{t+1}K_{t+1}\right] \qquad [073]$$

$$Q_t K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left(R_{t+1}K_{t+1} - Q_{t+1}I_{t+1} + Q_{t+1}K_{t+2}\right) \qquad [074]$$

$$Q_t K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left[\begin{array}{l} R_{t+1}K_{t+1} - Q_{t+1}I_{t+1} \\ + \dfrac{1}{(1+r)}\left(R_{t+2}K_{t+2} - Q_{t+2}I_{t+2} + Q_{t+2}K_{t+3}\right) \end{array}\right] \qquad [075]$$

$$Q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s}\left[R_{t+s}K_{t+s} - Q_{t+s}I_{t+s}\right] + \lim_{s\to\infty}\left(\frac{1}{(1+r)^s} Q_{t+s}K_{t+s+1}\right) \qquad [076]$$

$$\lim_{s\to\infty}\left(\frac{1}{(1+r)^s} Q_{t+s}K_{t+s+1}\right) = 0 \qquad [077]$$

$$Q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s}\left[R_{t+s}K_{t+s} - Q_{t+s}I_{t+s}\right] \qquad [078]$$

$$R_t K_t = p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t \qquad [079]$$

$$Q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s} L_{t+s} - Q_{t+s} I_{t+s} \right] \qquad [080]$$

$$\frac{\displaystyle\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \begin{bmatrix} p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s} L_{t+s} \\ - q_{t+s} I_{t+s} \left(1 + \frac{\gamma}{2} I_{t+s} \right) \end{bmatrix}}{Q_t K_{t+1}} = 1 + \frac{\displaystyle\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[q_{t+s} I_{t+s} \left(\frac{\gamma}{2} I_{t+s} \right) \right]}{Q_t K_{t+1}} \qquad [081]$$

$$C(I_t, K_t) = q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_t^{\,2}}{K_t} \qquad [082]$$

$$\frac{\displaystyle\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s} L_{t+s} - q_{t+s} I_{t+s} \left(1 + \frac{\gamma}{2} \frac{I_{t+s}}{K_{t+s}} \right) \right]}{Q_t K_{t+1}} = 1 \qquad [083]$$

$$Q_t = \frac{(1+r)}{(1-\delta)} Q_{t-1} - \frac{1}{(1-\delta)} p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} \qquad [084]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \left\{ (1-\delta) Q_{t+1} + p_{t+1} \frac{\partial F}{\partial K_{t+1}} \right\} \qquad [085]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(1-\delta)^3}{(1+r)^2} Q_{t+3} + \dfrac{(1-\delta)^2}{(1+r)^2} p_{t+3} \dfrac{\partial F}{\partial K_{t+3}} \\ + \dfrac{(1-\delta)}{(1+r)} p_{t+2} \dfrac{\partial F}{\partial K_{t+2}} \\ + p_{t+1} \dfrac{\partial F}{\partial K_{t+1}} \end{array} \right\} \qquad [086]$$

$$\lim_{t \to \infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^t Q_t = 0 \qquad [087]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^{s-1} p_{t+s} \frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} \qquad [088]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^{s-1} R_{t+s} \qquad [089]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r} \right)^{s} R_{t+s+1} \qquad [090]$$

$$I_t = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{Q_t}{q_t} - 1 \right) \qquad [091]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{s-1}\tilde{R}_{t+s} \qquad [092]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{s-1}R_t \qquad [093]$$

$$q_t = \frac{1}{(1+r)}\left(\frac{1}{1-\frac{1-\delta}{1+r}}\right)R_t \qquad [094]$$

$$q_t = \frac{1}{(1+r)}\frac{1}{\left(\frac{r+\delta}{1+r}\right)}R_t \qquad [095]$$

$$Q_t = \frac{1}{(r+\delta)}R_t \qquad [097]$$

$$R_t = (r+\delta)\,Q_t \qquad [098]$$

$$I_t = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{q_t}\frac{1}{(r+\delta)}R_t - 1\right) \qquad [099]$$

$$\tilde{Q}_{t+s} = \frac{1}{(r+\delta)}\tilde{R}_{t+s} = \frac{1}{(r+\delta)}R_t \qquad [100]$$

$$\tilde{I}_{t+s} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\tilde{q}_{t+s}}\frac{1}{(r+\delta)}\tilde{R}_{t+s} - 1\right) = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{q_t}\frac{1}{(r+\delta)}R_t - 1\right) = I_t \qquad [101]$$

$$\tilde{K}_{t+s} = (1-\delta)\tilde{K}_{t+s-1} + \tilde{I}_{t+s-1} \qquad [102]$$

$$\tilde{K}_{t+s} = (1-\delta)\left[(1-\delta)\tilde{K}_{t+s-2} + \tilde{I}_{t+s-2}\right] + \tilde{I}_{t+s-1} \qquad [103]$$

$$\tilde{K}_{t+s} = (1-\delta)^s K_t + I_t\left(\sum_{\theta=1}^{s}(1-\delta)^{\theta-1}\right) \qquad [104]$$

$$\frac{\partial F}{\partial K_t} = \frac{F(K_t, L_t)}{K_t} - \frac{L_t}{K_t}\frac{\partial F}{\partial L_t} \qquad [105]$$

$$\frac{\partial F}{\partial K_t} = F\left(1, \frac{L_t}{K_t}\right) - \frac{L_t}{K_t}\frac{\partial F}{\partial L_t} \qquad [106]$$

$$\frac{\partial F}{\partial K_t} = F\left(1, \frac{L_t}{K_t}\right) - \frac{L_t}{K_t}\frac{w_t}{p_t} \qquad [107]$$

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = (r+\delta) Q_t \quad [108]$$

$$F(K_t, L_t) = \frac{(r+\delta)Q_t}{p_t} K_t + \frac{w_t}{p_t} L_t \quad [109]$$

$$F\left(1, \frac{L_t}{K_t}\right) = \frac{(r+\delta)Q_t}{p_t} + \frac{w_t}{p_t}\frac{L_t}{K_t} \quad [110]$$

$$I_t = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{R_t}{\bar{u}_t} - 1\right) \quad [111]$$

$$I_t = a\left\{\frac{p^n MP_k U}{q(\delta + J^F)} - 1\right\} = a\left\{\frac{B}{C} - 1\right\} \geq 0 \quad [112]$$

$$\frac{I_t}{K_t} = q\gamma_1\left[\left(\frac{B}{C}\right)^2 + \gamma_2\left(\frac{B}{C}\right)\right] \quad [113]$$

$$\frac{I_t}{K_t} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{R_t}{\bar{u}_t} - 1\right) \quad [114]$$

$$\frac{INV_{it}}{K_{it}} = A_i\left(\frac{KINC_{it}}{PK_{it}\, K_{it}\, r_t}\right)^{\beta_i} \quad [115]$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s}\left[p_t F(K_t, L_t) - w_t\, L_t\right] = \frac{1}{r}\left[p_t F(K_t, L_t) - w_t\, L_t\right] \quad [116]$$

$$\frac{INV_{it}}{K_{it}} = A_i \quad [117]$$

$$\frac{INV_{it}}{K_{it}} = A_i\left(\frac{KINC_{it}}{PK_{it}\, K_{it}\,(r_t + \delta)}\right)^{\beta_i} \quad [118]$$

$$\frac{I}{K} = z\left[\frac{profit}{K\, PK\left(i^* + \delta - \frac{\Delta PK}{PK}\right)}\right]^{\sigma} \quad [119]$$

$$\frac{I_{it}}{K_{it}} = B_i\left(\frac{KINC_{it}\,(1+\pi_t)}{PK_{it}\, K_{it}\,(1+rd_t)}\right)^{\varepsilon_i} \quad [120]$$

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1+\pi_t}{1+rd_t}\right)^{t+s} KINC_t = \frac{1+\pi_t}{rd_t-\pi_t} KINC_t \qquad [121]$$

$$\frac{I_i}{K_i} = B_i\left(\frac{RK_i}{PK\,K_i}\right)^{\sigma 1}\left(\frac{J_e}{1+PINFL}\right)^{\sigma 2}\left(\frac{Autofin}{Autofin0}\right)^{\sigma 3} \qquad [122]$$

$$\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{rs_i\,IND_i}{(1+TIN)^t}\right) = \frac{rs_i\,IND_i}{TIN} \qquad [123]$$

$$MAX \sum_i \left(\frac{rs_i}{TIN} - PK_i\right) IND_i \qquad [124]$$

$$\text{s.c. } \sum_i PK_i IND_i \le IT \qquad [125]$$

$$\Lambda = \sum_i \left(\frac{rs_i}{TIN} - PK_i\right) IND_i + \lambda\left(IT - \sum_i PK_i IND_i\right) \qquad [126]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial IND_i} = \left(\frac{rs_i}{TIN} - PK_i\right) - \lambda PK_i \le 0 \qquad [127]$$

$$IND_i \ge 0 \text{ (contrainte de non-négativité)} \qquad [128]$$

$$IND_i\left[\left(\frac{rs_i}{TIN} - PK_i\right) - \lambda PK_i\right] = 0 \text{ (contrainte d'orthogonalité)} \qquad [129]$$

$$\left(IT - \sum_i PK_i IND_i\right) \ge 0 \qquad [130]$$

$$\lambda \ge 0 \text{ (contrainte de non-négativité)} \qquad [131]$$

$$\lambda\left(IT - \sum_i PK_i IND_i\right) = 0 \text{ (contrainte d'orthogonalité)} \qquad [132]$$

$$\frac{rs_i}{TIN} - (1+\lambda) PK_i \le 0 \qquad [133]$$

$$\frac{rs_i}{TIN} \le (1+\lambda) PK_i \qquad [134]$$

$$\frac{\left(rs_i/TIN\right)}{PK_i} \le (1+\lambda) \qquad [135]$$

$$\frac{\left(rs_i/TIN\right)}{PK_i} < (1+\lambda) \text{ (inégalité stricte)} \qquad [136]$$

$$v_i = \left(\frac{rs_i}{TIN} - PK_i \right) \quad [137]$$

$$U_{in} = \beta_i\, v_i + \varepsilon_{in} \quad [138]$$

$$\text{Prob}[E \leq \varepsilon] = \text{F}(\varepsilon) = \exp\,[-\,\text{e}^{-\,\mu\,(\varepsilon -\,\eta)}] \quad [139]$$

$$\text{Pr}_n\,(i) = \frac{\exp(\beta_i v_i)}{\sum_j \exp(\beta_j v_j)} \quad [140]$$

$$K^S = \left[\sum_i \left(\gamma_i^k\right)^{\omega^K} \left(KS_i\right)^{\frac{1+\omega^K}{\omega^K}} \right]^{\frac{\omega^K}{1+\omega^K}} \quad [141]$$

$$KS_i^s = \gamma_i^k \left(\frac{R_i}{TR} \right)^{\omega^K} K^s \;\text{ si }\; 0 \leq \omega^K < \infty \quad [142]$$

$$R_i = TR \text{ si } \omega^K = \infty \quad [143]$$

$$TR = \left[\sum_i \gamma_i^k \left(R_i\right)^{1+\omega^K} \right]^{\frac{1}{1+\omega^K}} \;\text{ si }\; 0 \leq \omega^K < \infty \quad [144]$$

$$\sum_i K_i^d = K^s \;\text{ si }\; \omega^K = \infty \quad [145]$$

$$\frac{R_{i,t}^{old} \Big/ R_{i,t}^{new}}{R_{i,t-1}^{old} \Big/ R_{i,t-1}^{new}} \quad [146]$$

$$F = \frac{Gm_1 m_2}{d^2} \quad [147]$$

$$N_{od} = \frac{G_{od}\, O_o\, D_d}{f(d_{od})} \quad [148]$$

$$\sum_o N_{od} = D_d \sum_o \frac{G_{od}\, O_o}{f(d_{od})} = D_d \text{ pour toute destination } d \quad [149]$$

$$\sum_d N_{od} = O_o \sum_d \frac{G_{od}\, D_d}{f(d_{od})} = O_o \text{ pour toute origine } o \quad [150]$$

$$PK_{k,t}IND_{k,i,rg,t} = \frac{G_{k,i,rg,t}\, D_{k,i,rg,t}}{f(d_{k,i,rg,t})} \tag{151}$$

$$\sum_k \sum_i \sum_{rg} PK_{k,t}IND_{k,i,rg,t} = \sum_k \sum_i \sum_{rg} \frac{G_{k,i,rg,t} D_{k,i,rg,t}}{f(d_{k,i,rg,t})} = IT_t \tag{152}$$

$f(d_{k,i,rg,t}) = e^{-\alpha\, rs_{k,i,rg,t}}$, où α est un paramètre libre. [153]

$$PK_{k,t}IND_{k,i,rg,t} = G_{k,i,rg,t}\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}}\, PK_{k,t}\, KS_{k,i,rg,t} \tag{154}$$

$$\sum_k \sum_i \sum_{rg} PK_{k,t}IND_{k,i,rg,t} = \sum_k \sum_i \sum_{rg} \left(G_{k,i,rg,t}\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}}\, PK_{k,t}\, KS_{k,i,rg,t} \right) = IT_t \tag{155}$$

$$G_{k,i,rg,t} = \frac{A_{k,i,rg}\, IT_t}{\sum_{kj} \sum_j \sum_{rgj} \left(e^{\alpha\, rs_{kj,j,rgj,t}}\, A_{kj,j,rgj}\, PK_{kj,t}\, KS_{kj,j,rgj,t} \right)} \tag{156}$$

$$PK_{k,0}\, IND_{k,i,rg,0} = G_{k,i,rg,0}\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,0}}\, PK_{k,0}\, KS_{k,i,rg,0} \tag{157}$$

$$PK_{k,0}\, IND_{k,i,rg,0} = \frac{A_{k,i,rg}\, IT_0\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,0}}\, PK_{k,0}\, KS_{k,i,rg,0}}{\sum_{kj} \sum_j \sum_{rgj} \left(e^{\alpha\, rs_{kj,j,rgj,0}}\, A_{kj,j,rgj,0}\, PK_{kj,0}\, KS_{kj,j,rgj,0} \right)} \tag{158}$$

$$\begin{aligned} &\frac{A_{k,i,rg}\, IT_0\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,0}}\, PK_{k,0}\, KS_{k,i,rg,0}}{\sum_{kj} \sum_j \sum_{rgj} \left(e^{\alpha\, rs_{kj,j,rgj,0}}\, A_{kj,j,rgj,0}\, PK_{kj,0}\, KS_{kj,j,rgj,0} \right)} \\ &= \frac{\lambda A_{k,i,rg}\, IT_0\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,0}}\, PK_{k,0}\, KS_{k,i,rg,0}}{\lambda \sum_{kj} \sum_j \sum_{rgj} \left(e^{\alpha\, rs_{kj,j,rgj,0}}\, A_{kj,j,rgj,0}\, PK_{kj,0}\, KS_{kj,j,rgj,0} \right)} \\ &= \frac{\lambda A_{k,i,rg}\, IT_0\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,0}}\, PK_{k,0}\, KS_{k,i,rg,0}}{\sum_{kj} \sum_j \sum_{rgj} \left(e^{\alpha\, rs_{kj,j,rgj,0}}\, \lambda A_{kj,j,rgj,0}\, PK_{kj,0}\, KS_{kj,j,rgj,0} \right)} \end{aligned} \tag{159}$$

$$\sum_{kj} \sum_j \sum_{rgj} \left(e^{\alpha\, rs_{kj,j,rgj,0}}\, \lambda A_{kj,j,rgj,0}\, PK_{kj,0}\, KS_{kj,j,rgj,0} \right) = 1 \tag{160}$$

$$PK_{k,i,rg,0}\, IND_{k,i,rg,0} = A_{k,i,rg}\, IT_0\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,0}}\, PK_{k,i,rg,0}\, KS_{k,i,rg,0} \tag{161}$$

$$A_{k,i,rg} = \frac{PK_{k,0}\, IND_{k,i,rg,0}}{IT_0\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,0}}\, PK_{k,0}\, KS_{k,i,rg,0}} \qquad [162]$$

$$A_{k,i,rg} = \frac{IND_{k,i,rg,0}}{IT_0\, e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,0}}\, KS_{k,i,rg,0}} \qquad [163]$$

$$PK_{k,t} IND_{k,i,rg,t} = \frac{A_{k,i,rg}\; IT_t\; e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}}\; PK_{k,t}\; KS_{k,i,rg,t}}{\sum_{kj}\sum_{j}\sum_{rgj}\left(e^{\alpha\, rs_{kj,j,rgj,t}}\; A_{kj,j,rgj,t}\; PK_{kj,t}\; KS_{kj,j,rgj,t}\right)} \qquad [164]$$

$$IND_{k,i,rg,t} = \frac{A_{k,i,rg}\; IT_t\; e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}}\; KS_{k,i,rg,t}}{\sum_{kj}\sum_{j}\sum_{rgj}\left(e^{\alpha\, rs_{kj,j,rgj,t}}\; A_{kj,j,rgj,t}\; PK_{kj,t}\; KS_{kj,j,rgj,t}\right)} \qquad [165]$$

$$\frac{IND_{k,i,rg,t}}{IT_t} = \frac{A_{k,i,rg}\; e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}}\; KS_{k,i,rg,t}}{\sum_{kj}\sum_{j}\sum_{rgj}\left(e^{\alpha\, rs_{kj,j,rgj,t}}\; A_{kj,j,rgj,t}\; PK_{kj,t}\; KS_{kj,j,rgj,t}\right)} \qquad [166]$$

$$\frac{PK_s I_{irs}}{S_r} = \frac{A_{irs} PK_s K_{is} e^{\alpha\, wk_{is}}}{\sum_{i,s} A_{irs} PK_s K_{is} e^{\alpha\, wk_{is}}} \qquad [167]$$

$$\frac{PK_{k,t} IND_{k,i,rg,t}}{IT_t} = \frac{A_{k,i,rg} PK_{k,t} KS_{k,i,rg,t} e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}}}{\sum_{kj}\sum_{j}\sum_{rgj} A_{kj,j,rgj} PK_{kj,t} KS_{kj,j,rgj,t} e^{\alpha\, rs_{kj,j,rgj,t}}} \qquad [168]$$

$$\frac{IND_{k,i,rg,t}}{IT_t} = \frac{A_{k,i,rg} KS_{k,i,rg,t} e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}}}{\sum_{kj}\sum_{j}\sum_{rgj} A_{kj,j,rgj} PK_{kj,t} KS_{kj,j,rgj,t} e^{\alpha\, rs_{kj,j,rgj,t}}} \qquad [169]$$

$$\frac{PK_{k,t} IND_{k,i,rg,t}}{IT_t} = \frac{A_{k,i,rg} PK_{k,t} KS_{k,i,rg,t}}{\sum_{kj}\sum_{j}\sum_{rgj} A_{kj,j,rgj} PK_{kj,t} KS_{kj,j,rgj,t}} \qquad [170]$$

$$IND_{k,i,rg,t} = BA_{k,i,rg} KS_{k,i,rg,t} e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}} \qquad [171]$$

$$\sum_{k}\sum_{i}\sum_{rg} PK_{k,t} IND_{k,i,rg,t} = IT_t \qquad [172]$$

$$R_t = \frac{1}{\alpha}\ln\left[\sum_k\sum_i\sum_{rg}\left(\frac{A_{k,i,rg}PK_{k,t}KS_{k,i,rg,t}}{\sum_{kj}\sum_j\sum_{rgj}A_{kj,j,rgj}PK_{kj,t}KS_{kj,j,rgj,t}}e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}}\right)\right] \quad [173]$$

$$e^{\alpha R_t} = \sum_k\sum_i\sum_{rg}\left(\frac{A_{k,i,rg}PK_{k,t}KS_{k,i,rg,t}}{\sum_{kj}\sum_j\sum_{rgj}A_{kj,j,rgj}PK_{kj,t}KS_{kj,j,rgj,t}}e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}}\right) \quad [174]$$

$$e^{\alpha R_t}\sum_{kj}\sum_j\sum_{rgj}A_{kj,j,rgj}PK_{kj,t}KS_{kj,j,rgj,t} = \sum_k\sum_i\sum_{rg}A_{k,i,rg}PK_{k,t}KS_{k,i,rg,t}e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}} \quad [175]$$

$$\frac{PK_{k,t}IND_{k,i,rg,t}}{IT_t} = \frac{A_{k,i,rg}PK_{k,t}KS_{k,i,rg,t}e^{\alpha\, rs_{k,i,rg,t}}}{e^{\alpha R_t}\sum_{kj}\sum_j\sum_{rgj}A_{kj,j,rgj}PK_{kj,t}KS_{kj,j,rgj,t}} \quad [176]$$

$$\frac{PK_{k,t}IND_{k,i,rg,t}}{IT_t} = \frac{A_{k,i,rg}PK_{k,t}KS_{k,i,rg,t}}{\sum_{kj}\sum_j\sum_{rgj}A_{kj,j,rgj}PK_{kj,t}KS_{kj,j,rgj,t}}e^{\alpha(rs_{k,i,rg,t}-R_t)} \quad [177]$$

$$B_t = \frac{e^{-\alpha R_t}\ IT_t}{\sum_{kj}\sum_j\sum_{rgj}A_{kj,j,rgj}PK_{kj,t}KS_{kj,j,rgj,t}} \quad [178]$$

$$v_{k,i,rg,t} = \ln(A_{k,i,rg}PK_{k,t}KS_{k,i,rg,t}) + \alpha\, rs_{k,i,rg,t} \quad [179]$$

$$\theta_{it} = \frac{\theta_{i0}\left(\frac{PR_{it}}{APR_t}\right)}{\sum_j\theta_{i0}\left(\frac{PR_{jt}}{APR_t}\right)} \quad [180]$$

$$\theta_{i0} = \frac{R_{i0}KD_{i0}}{\sum_j R_{j0}KD_{j0}} \quad [181]$$

$$PR_{it} = \frac{R_{it}KD_{it} - \delta\, KD_{it}PK_t}{KD_{it}PK_t} \quad [182]$$

$$APR_t = \sum_i\left(\frac{KD_{it}PK_t}{\sum_j KD_{jt}PK_t}PR_{it}\right) \quad [183]$$

$$APR_t = \sum_i \left(\frac{KD_{it}}{\sum_j KD_{jt}} PR_{it} \right) \quad [184]$$

$$KD_{i,t+1} = (1-\delta)KD_{it} + \theta_{it} IT_t \quad [185]$$

$$\eta_{it} = \left(\frac{KD_{it}}{\sum_j KD_{jt}} \right) \left[\beta_i \left(\frac{R_{it}}{RM_t} - 1 \right) + 1 \right] \quad [186]$$

$$RM_t = \sum_i \left(\frac{KD_{it}}{\sum_j KD_{jt}} R_{it} \right) \quad [187]$$

$$\eta_{it} = \left(\frac{KD_{it}}{\sum_j KD_{jt}} \right) \left[\beta_i \left(\frac{R_{it}}{RM_t} \right) + (1-\beta_i) \right] \quad [188]$$

$$\eta_{it} = (1-\beta_i) \left(\frac{KD_{it}}{\sum_j KD_{jt}} \right) + \beta_i \left(\frac{R_{it}}{RM_t} \right) \left(\frac{KD_{it}}{\sum_j KD_{jt}} \right) \quad [189]$$

$$\eta_{it} = \left(\frac{KD_{it}}{\sum_j KD_{jt}} \right) \left(\frac{R_{it}}{RM_t} \right) \quad [190]$$

$$IND_{it} = \eta_{it} \left(\frac{\sum_j PC_{jt} INV_{jt}}{PK_t} \right) \quad [191]$$

$$PK_t = \frac{\sum_j PC_{jt} INV_{jt}}{\sum_j INV_{jt}} \quad [192]$$

$$KD_{i,t+1} = KD_{it} \left(1 + \frac{IND_{it}}{KD_{it}} - \delta \right) \quad [193]$$

$$KD_{i,t+1} = (1-\delta)KD_{it} + IND_{it} \quad [194]$$

$$H_{i,t+1} = SP_{it} + \mu\, SP_{it} \left(\frac{R_{it} - AR_t}{AR_t} \right) \quad [195]$$

$$SP_{it} = \frac{R_{it} KD_{it}}{\sum_j R_{jt} KD_{jt}}$$: parts sectorielles des profits; [196]

$$H_{i,t+1} = SP_{it} \left[\mu \left(\frac{R_{it}}{AR_t} - 1 \right) + 1 \right] \quad [197]$$

$$K_{i,t+1} = (1 - dep) K_{i,t} + \theta_i\, IT_t \quad [198]$$

$$\frac{ro_i}{uo_i} = 1 \quad [199]$$

$$\frac{INV_{it}}{K_{it}} = A_i \left(\frac{KINC_{it}}{PK_{it}\, K_{it} \left(r_t + \delta \right)} \right)^{\beta_i} = g + \delta \quad [200]$$

$$A_i = \left(g + \delta \right) \left(\frac{KINC_{it}}{PK_{it}\, K_{it} \left(r_t + \delta \right)} \right)^{-\beta_i} \quad [201]$$

$$MAX\ V = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t - C(I_t, K_t) \right] \quad [202]$$

$$MAX\ V = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t - q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_t^{\,2}}{K_t} \right] \quad [203]$$

$$MAX\ V = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t \left(1 + \frac{\gamma}{2} \frac{I_t}{K_t} \right) \right] \quad [204]$$

$$\Lambda = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left\{ p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t \left(1 + \frac{\gamma}{2} \frac{I_t}{K_t} \right) + \lambda_t \left[I_t - K_{t+1} + (1-\delta) K_t \right] \right\}$$

$$- \mu \left(K_0 - \overline{K}_0 \right) \quad [205]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial L_t} = \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t \frac{\partial F}{\partial L_t} - w_t \right] = 0 \quad [206]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial I_t} = \frac{1}{(1+r)^t} \left[q_t \left(-1 - \gamma \frac{I_t}{K_t} \right) + \lambda_t \right] = \frac{1}{(1+r)^t} \left[-q_t \left(1 + \gamma \frac{I_t}{K_t} \right) + \lambda_t \right] = 0 \quad [207]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial K_t} = \frac{1}{(1+r)^t}\left[p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t \frac{\gamma}{2}\frac{I_t^2}{K_t^2} - (1+r)\lambda_{t-1} + (1-\delta)\lambda_t\right] = 0 \qquad [208]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_t} = \frac{1}{(1+r)^t}\left[I_t - K_{t+1} + (1-\delta)K_t\right] \qquad [209]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \mu} = -\left(K_0 - \overline{K}_0\right) = 0 \qquad [210]$$

$$\lambda_t = q_t\left(1 + \gamma \frac{I_t}{K_t}\right) \qquad [211]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial K_t} = \frac{1}{(1+r)^t}\left[p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t \frac{\gamma}{2}\frac{I_t^2}{K_t^2} - (1+r)\, q_{t-1}\left(1+\gamma\frac{I_{t-1}}{K_{t-1}}\right) + (1-\delta)q_t\left(1+\gamma\frac{I_t}{K_t}\right)\right] = 0 \qquad [212]$$

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t \frac{\gamma}{2}\frac{I_t^2}{K_t^2} - (1+r)\, q_{t-1}\left(1+\gamma\frac{I_{t-1}}{K_{t-1}}\right) + (1-\delta)q_t\left(1+\gamma\frac{I_t}{K_t}\right) = 0 \qquad [213]$$

$$Q_t = \frac{\partial}{\partial I_t}\left[q_t I_t\left(1+\frac{\gamma}{2}\frac{I_t}{K_t}\right)\right] = q_t\left(1+\gamma\frac{I_t}{K_t}\right) \qquad [214]$$

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t \frac{\gamma}{2}\frac{I_t^2}{K_t^2} = (1+r)Q_{t-1} - (1-\delta)Q_t \qquad [215]$$

$$(Q_t - Q_{t-1}) = \frac{(Q_t - Q_{t-1})}{Q_{t-1}}Q_{t-1} = \Pi_t Q_{t-1} \qquad [216]$$

$$\left(p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t \frac{\gamma}{2}\frac{I_t^2}{K_t^2}\right) = r\,Q_{t-1} + \delta\,Q_t - (Q_t - Q_{t-1}) \qquad [217]$$

$$\left(p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t \frac{\gamma}{2}\frac{I_t^2}{K_t^2}\right) = (r - \Pi_t)Q_{t-1} + \delta\,Q_t \qquad [218]$$

$$q_t \frac{\gamma}{2}\frac{I_t^2}{K_t^2} = -\frac{\partial}{\partial K_t}\left(q_t \frac{\gamma}{2}\frac{I_t^2}{K_t}\right) = -\frac{\partial C(I_t, K_t)}{\partial K_t} \qquad [219]$$

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial K_t} = p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} - \frac{\partial C(I_t, K_t)}{\partial K_t} = \left(p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t \frac{\gamma}{2}\frac{I_t^2}{K_t^2}\right) \qquad [220]$$

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial K_t} = (r - \Pi_t) Q_{t-1} + \delta Q_t = U_t \qquad [221]$$

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial K_t} = (1+r) Q_{t-1} - (1-\delta) Q_t \qquad [222]$$

$$(1+r) Q_{t-1} = (1-\delta) Q_t + \frac{\partial \Phi_t}{\partial K_t} \qquad [223]$$

$$(1+r) Q_t = (1-\delta) Q_{t+1} + \frac{\partial \Phi_{t+1}}{\partial K_{t+1}} \qquad [224]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \left[(1-\delta) Q_{t+1} + \frac{\partial \Phi_{t+1}}{\partial K_{t+1}} \right] \qquad [225]$$

$$Q_t K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)} \left[(1-\delta) Q_{t+1} K_{t+1} + \frac{\partial \Phi_{t+1}}{\partial K_{t+1}} K_{t+1} \right] \qquad [226]$$

$$Q_t K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)} \left(Q_{t+1} \left(K_{t+2} - I_{t+1} \right) + \frac{\partial \Phi_{t+1}}{\partial K_{t+1}} K_{t+1} \right) \qquad [227]$$

$$Q_t K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)} \left(Q_{t+1} K_{t+2} - Q_{t+1} I_{t+1} + \frac{\partial \Phi_{t+1}}{\partial K_{t+1}} K_{t+1} \right) \qquad [228]$$

$$Q_t K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)} \left(\frac{\partial \Phi_{t+1}}{\partial K_{t+1}} K_{t+1} - Q_{t+1} I_{t+1} + Q_{t+1} K_{t+2} \right) \qquad [229]$$

$$Q_t K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)} \left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi_{t+1}}{\partial K_{t+1}} K_{t+1} - Q_{t+1} I_{t+1} \\ + \dfrac{1}{(1+r)} \left(\dfrac{\partial \Phi_{t+2}}{\partial K_{t+2}} K_{t+2} - Q_{t+2} I_{t+2} + Q_{t+2} K_{t+3} \right) \end{array} \right] \qquad [230]$$

$$Q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[\frac{\partial \Phi_{t+s}}{\partial K_{t+s}} K_{t+s} - Q_{t+s} I_{t+s} \right] + \lim_{s \to \infty} \left(\frac{1}{(1+r)^s} Q_{t+s} K_{t+s+1} \right) \qquad [231]$$

$$Q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[\frac{\partial \Phi_{t+s}}{\partial K_{t+s}} K_{t+s} - Q_{t+s} I_{t+s} \right] \qquad [232]$$

$$\frac{\partial F}{\partial K_t} K_t = F(K_t, L_t) - \frac{\partial F}{\partial L_t} L_t \qquad [233]$$

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} K_t = p_t F(K_t, L_t) - p_t \frac{\partial F}{\partial L_t} L_t \qquad [234]$$

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial K_t} K_t = \left(p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t + q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_t^2}{K_t^2} K_t \right) = \left(p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t + q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_t^2}{K_t} \right) \qquad [235]$$

$$Q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s} L_{t+s} + q_{t+s} \frac{\gamma}{2} \frac{I_{t+s}{}^2}{K_{t+s}} - Q_{t+s} I_{t+s} \right] \quad [236]$$

$$Q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[\begin{array}{l} p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s} L_{t+s} \\ + q_{t+s} \frac{\gamma}{2} \frac{I_{t+s}{}^2}{K_{t+s}} - q_{t+s} \left(1 + \gamma \frac{I_{t+s}}{K_{t+s}} \right) I_{t+s} \end{array} \right] \quad [237]$$

$$Q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left\{ \begin{array}{l} p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s} L_{t+s} \\ + q_{t+s} I_{t+s} \left[\frac{\gamma}{2} \frac{I_{t+s}}{K_{t+s}} - \left(1 + \gamma \frac{I_{t+s}}{K_{t+s}} \right) \right] \end{array} \right\} \quad [238]$$

$$Q_t K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s} L_{t+s} - q_{t+s} I_{t+s} \left(1 + \frac{\gamma}{2} \frac{I_{t+s}}{K_{t+s}} \right) \right] \quad [239]$$

$$(1-\delta) Q_t = (1+r) Q_{t-1} - \left(p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_t{}^2}{K_t{}^2} \right) \quad [240]$$

$$Q_t = \frac{(1+r)}{(1-\delta)} Q_{t-1} - \frac{1}{(1-\delta)} \left(p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} + q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_t{}^2}{K_t{}^2} \right) \quad [241]$$

$$Q_{t+1} = \frac{(1+r)}{(1-\delta)} Q_t - \frac{1}{(1-\delta)} \left(p_{t+1} \frac{\partial F}{\partial K_{t+1}} + q_t \frac{\gamma}{2} \frac{I_{t+1}{}^2}{K_{t+1}{}^2} \right) \quad [242]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \left\{ (1-\delta) Q_{t+1} + \left(p_{t+1} \frac{\partial F}{\partial K_{t+1}} + q_{t+1} \frac{\gamma}{2} \frac{I_{t+1}{}^2}{K_{t+1}{}^2} \right) \right\} \quad [243]$$

$$Q_{t+1} = \frac{1}{(1+r)} \left\{ (1-\delta) Q_{t+2} + \left(p_{t+2} \frac{\partial F}{\partial K_{t+2}} + q_{t+1} \frac{\gamma}{2} \frac{I_{t+2}{}^2}{K_{t+2}{}^2} \right) \right\} \quad [244]$$

$$Q_{t+2} = \frac{1}{(1+r)} \left\{ (1-\delta) Q_{t+3} + \left(p_{t+3} \frac{\partial F}{\partial K_{t+3}} + q_{t+1} \frac{\gamma}{2} \frac{I_{t+3}{}^2}{K_{t+3}{}^2} \right) \right\} \quad [245]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(1-\delta)^3}{(1+r)^2}Q_{t+3} + \dfrac{(1-\delta)^2}{(1+r)^2}\left(p_{t+3}\dfrac{\partial F}{\partial K_{t+3}} + q_{t+3}\dfrac{\gamma}{2}\dfrac{I_{t+3}{}^2}{K_{t+3}{}^2}\right) \\ + \dfrac{(1-\delta)}{(1+r)}\left(p_{t+2}\dfrac{\partial F}{\partial K_{t+2}} + q_{t+2}\dfrac{\gamma}{2}\dfrac{I_{t+2}{}^2}{K_{t+2}{}^2}\right) \\ + \left(p_{t+1}\dfrac{\partial F}{\partial K_{t+1}} + q_{t+1}\dfrac{\gamma}{2}\dfrac{I_{t+1}{}^2}{K_{t+1}{}^2}\right) \end{array}\right\} \qquad [246]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(1-\delta)^s}{(1+r)^{s-1}}Q_{t+s} + \dfrac{(1-\delta)^{s-1}}{(1+r)^{s-1}}\left(p_{t+s}\dfrac{\partial F}{\partial K_{t+s}} + q_{t+s}\dfrac{\gamma}{2}\dfrac{I_{t+s}{}^2}{K_{t+s}{}^2}\right) \\ \vdots \\ + \dfrac{(1-\delta)^2}{(1+r)^2}\left(p_{t+3}\dfrac{\partial F}{\partial K_{t+3}} + q_{t+3}\dfrac{\gamma}{2}\dfrac{I_{t+3}{}^2}{K_{t+3}{}^2}\right) \\ + \dfrac{(1-\delta)}{(1+r)}\left(p_{t+2}\dfrac{\partial F}{\partial K_{t+2}} + q_{t+2}\dfrac{\gamma}{2}\dfrac{I_{t+2}{}^2}{K_{t+2}{}^2}\right) \\ + \left(p_{t+1}\dfrac{\partial F}{\partial K_{t+1}} + q_{t+1}\dfrac{\gamma}{2}\dfrac{I_{t+1}{}^2}{K_{t+1}{}^2}\right) \end{array}\right\} \qquad [247]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{s-1}\left(p_{t+s}\frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} + q_{t+s}\frac{\gamma}{2}\frac{I_{t+s}{}^2}{K_{t+s}{}^2}\right) \qquad [248]$$

$$\frac{\partial C(I_t,K_t)}{\partial K_t} = -q_t\frac{\gamma}{2}\frac{I_t^2}{K_t^2} = -\frac{C(I_t,K_t)}{K_t} \qquad [249]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{s-1}\left(R_{t+s} - \frac{\partial C(I_{t+s},K_{t+s})}{\partial K_{t+s}}\right) \qquad [250]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{s}\left(R_{t+s+1} - \frac{\partial C(I_{t+s+1},K_{t+s+1})}{\partial K_{t+s+1}}\right) \qquad [251]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^{s}\left(R_{t+s+1} + \frac{C(I_{t+s+1},K_{t+s+1})}{K_{t+s+1}}\right) \qquad [252]$$

$$\frac{I_t}{K_t} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{Q_t}{q_t} - 1\right) \qquad [253]$$

$$\frac{C(I_{t+s},K_{t+s})}{K_{t+s}} = q_{t+s}\,\frac{\gamma}{2}\,\frac{{I_{t+s}}^2}{{K_{t+s}}^2} \qquad [254]$$

$$\frac{C(I_t,K_t)}{K_t} = q_t\,\frac{\gamma}{2}\,\frac{{I_t}^2}{{K_t}^2} \qquad [255]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^s\left(R_t + q_t\,\frac{\gamma}{2}\tilde{g}^2\right) \qquad [256]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)}\left(\frac{1}{1-\frac{1-\delta}{1+r}}\right)\left(R_t + q_t\,\frac{\gamma}{2}\tilde{g}^2\right) \qquad [257]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)}\,\frac{1}{\left(\frac{r+\delta}{1+r}\right)}\left(R_t + q_t\,\frac{\gamma}{2}\tilde{g}^2\right) \qquad [258]$$

$$Q_t = \frac{1}{(r+\delta)}\left(R_t + q_t\,\frac{\gamma}{2}\tilde{g}^2\right) \qquad [259]$$

$$\frac{I_t}{K_t} = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{q_t(r+\delta)}\left(R_t + q_t\,\frac{\gamma}{2}\tilde{g}^2\right) - 1\right] \qquad [260]$$

$$\tilde{g} = \frac{I_t}{K_t} \qquad [261]$$

$$\tilde{g} = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{q_t(r+\delta)}\left(R_t + q_t\,\frac{\gamma}{2}\tilde{g}^2\right) - 1\right] \qquad [262]$$

$$\left(1+\gamma\,\tilde{g}\right) = \frac{1}{q_t(r+\delta)}\left(R_t + q_t\,\frac{\gamma}{2}\tilde{g}^2\right) \qquad [263]$$

$$\left(1+\gamma\,\tilde{g}\right) = \frac{R_t}{q_t(r+\delta)} + \frac{1}{q_t(r+\delta)}q_t\,\frac{\gamma}{2}\tilde{g}^2 \qquad [264]$$

$$\left(1+\gamma\,\tilde{g}\right) = \frac{R_t}{q_t(r+\delta)} + \frac{1}{(r+\delta)}\frac{\gamma}{2}\tilde{g}^2 \qquad [265]$$

$$\frac{1}{(r+\delta)}\frac{\gamma}{2}\tilde{g}^2 - \gamma\,\tilde{g} + \left(\frac{R_t}{q_t(r+\delta)} - 1\right) = 0 \qquad [266]$$

$$A = \frac{1}{(r+\delta)}\frac{\gamma}{2} \tag{267}$$

$$B = -\gamma \tag{268}$$

$$C = \frac{R_t}{q_t(r+\delta)} - 1 \tag{269}$$

$$\frac{I_t}{K_t} = \tilde{g} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{270}$$

$$\frac{I_t}{K_t} = \tilde{g} = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\frac{1}{(r+\delta)}\frac{\gamma}{2}\left(\frac{R_t}{q_t(r+\delta)} - 1\right)}}{2\frac{1}{(r+\delta)}\frac{\gamma}{2}} \tag{271}$$

$$\frac{I_t}{K_t} = \tilde{g} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{\gamma}\frac{1}{(r+\delta)}\left(\frac{R_t}{q_t(r+\delta)} - 1\right)}}{\frac{1}{(r+\delta)}} \tag{272}$$

$$\frac{I_t}{K_t} = \tilde{g} = (r+\delta)\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{\gamma}\frac{1}{(r+\delta)}\left(\frac{R_t}{q_t(r+\delta)} - 1\right)}\right] \tag{273}$$

$$\Lambda = \sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^t}\left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t\left(K_{t+1} - (1-\delta)K_t\right)\right] - \lambda\left(K_0 - \overline{K}_0\right) \tag{274}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial I_t} = \frac{1}{(1+r)^t}\left(-q_t + \lambda_t\right) = 0 \tag{275}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial K_t} = \frac{1}{(1+r)^t}\left[p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} - (1+r)q_{t-1} + q_t(1-\delta)\right] = 0 \tag{276}$$

$$\lambda_t = q_t \tag{277}$$

$$MAX\ \left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - u_t K_t\right] \tag{278}$$

$$p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} = u_t \tag{279}$$

$$(1+r)q_{t-1} = (1-\delta)q_t + p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} \tag{280}$$

$$(1+r)\,q_t = (1-\delta)\,q_{t+1} + p_{t+1}\frac{\partial F}{\partial K_{t+1}} \qquad [281]$$

$$q_t = \frac{1}{(1+r)}\left[(1-\delta)\,q_{t+1} + p_{t+1}\frac{\partial F}{\partial K_{t+1}}\right] \qquad [282]$$

$$q_t\,K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left(q_{t+1}\left(K_{t+2} - I_{t+1}\right) + p_{t+1}\frac{\partial F}{\partial K_{t+1}}K_{t+1}\right) \qquad [283]$$

$$q_t\,K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left(q_{t+1}K_{t+2} - q_{t+1}I_{t+1} + p_{t+1}\frac{\partial F}{\partial K_{t+1}}K_{t+1}\right) \qquad [284]$$

$$q_t\,K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left[\begin{array}{l} p_{t+1}\dfrac{\partial F}{\partial K_{t+1}}K_{t+1} - q_{t+1}I_{t+1} \\ + \dfrac{1}{(1+r)}\left(p_{t+2}\dfrac{\partial F}{\partial K_{t+2}}K_{t+2} - q_{t+2}I_{t+2} + q_{t+2}K_{t+3}\right) \end{array}\right] \qquad [285]$$

$$q_{t+1} = \frac{1}{(1+r)}\left\{(1-\delta)\,q_{t+2} + p_{t+2}\frac{\partial F}{\partial K_{t+2}}\right\} \qquad [286]$$

$$q_{t+2} = \frac{1}{(1+r)}\left\{(1-\delta)\,q_{t+3} + p_{t+3}\frac{\partial F}{\partial K_{t+3}}\right\} \qquad [287]$$

$$q_t = \frac{1}{(1+r)}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(1-\delta)^s}{(1+r)^{s-1}}q_{t+s} + \dfrac{(1-\delta)^{s-1}}{(1+r)^{s-1}}p_{t+s}\dfrac{\partial F}{\partial K_{t+s}} \\ \quad\vdots \\ + \dfrac{(1-\delta)^2}{(1+r)^2}p_{t+3}\dfrac{\partial F}{\partial K_{t+3}} \\ + \dfrac{(1-\delta)}{(1+r)}p_{t+2}\dfrac{\partial F}{\partial K_{t+2}} \\ + p_{t+1}\dfrac{\partial F}{\partial K_{t+1}} \end{array}\right\} \qquad [288]$$

$$q_t = \frac{1}{(1+r)}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(1-\delta)^\theta}{(1+r)^{\theta-1}}q_{t+\theta} \\ + \displaystyle\sum_{s=1}^{\theta}\frac{(1-\delta)^{s-1}}{(1+r)^{s-1}}p_{t+s}\frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} \end{array}\right\} \qquad [289]$$

$$q_t = \frac{(1-\delta)^\theta}{(1+r)^\theta}q_\theta + \frac{1}{(1+r)}\sum_{s=1}^{\theta}\frac{(1-\delta)^{s-1}}{(1+r)^{s-1}}p_{t+s}\frac{\partial F}{\partial K_{t+s}} \qquad [290]$$

$$q_t = \frac{1}{(r+\delta)} R_t \qquad [291]$$

$$MAX\ V = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t - q_t \frac{\gamma}{2} I_t^{\,2} \right] \qquad [292]$$

$$MAX\ V = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left[p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t \left(1 + \frac{\gamma}{2} I_t \right) \right] \qquad [293]$$

$$\Lambda = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left\{ p_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - q_t I_t \left(1 + \frac{\gamma}{2} I_t \right) + \lambda_t \left[I_t - K_{t+1} + (1-\delta) K_t \right] \right\} - \mu \left(K_0 - \overline{K}_0 \right)$$

[294]

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial I_t} = \frac{1}{(1+r)^t} \left[q_t \left(-1 - \gamma I_t \right) + \lambda_t \right] = \frac{1}{(1+r)^t} \left[-q_t \left(1 + \gamma I_t \right) + \lambda_t \right] = 0 \qquad [295]$$

$$\lambda_{t+1} = q_t \left(1 + \gamma I_t \right) \qquad [296]$$

$$R_t = (1+r) Q_{t-1} - (1-\delta) Q_t \qquad [297]$$

$$(1+r) Q_{t-1} = (1-\delta) Q_t + R_t \qquad [298]$$

$$(1+r) Q_t = (1-\delta) Q_{t+1} + R_{t+1} \qquad [299]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \left[(1-\delta) Q_{t+1} + R_{t+1} \right] \qquad [300]$$

$$Q_t\, K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)} \left(Q_{t+1} \left(K_{t+2} - I_{t+1} \right) + R_{t+1} K_{t+1} \right) \qquad [301]$$

$$Q_t\, K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)} \left(Q_{t+1} K_{t+2} - Q_{t+1} I_{t+1} + R_{t+1} K_{t+1} \right) \qquad [302]$$

$$Q_t\, K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s}\, L_{t+s} - q_{t+s}\, I_{t+s} \left(1 + \gamma I_{t+s} \right) \right] \qquad [303]$$

$$Q_t\, K_{t+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[\begin{array}{l} p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s}\, L_{t+s} \\ - q_{t+s}\, I_{t+s} \left(1 + \frac{\gamma}{2} I_{t+s} \right) - q_{t+s}\, I_{t+s} \left(\frac{\gamma}{2} I_{t+s} \right) \end{array} \right] \qquad [304]$$

$$\frac{\displaystyle \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[\begin{array}{l} p_{t+s} F(K_{t+s}, L_{t+s}) - w_{t+s}\, L_{t+s} \\ - q_{t+s}\, I_{t+s} \left(1 + \frac{\gamma}{2} I_{t+s} \right) - q_{t+s}\, I_{t+s} \left(\frac{\gamma}{2} I_{t+s} \right) \end{array} \right]}{Q_t\, K_{t+1}} = 1 \qquad [305]$$

$$(1-\delta) Q_t = (1+r) Q_{t-1} - p_t \frac{\partial F}{\partial K_t} \qquad [306]$$

$$Q_{t+1} = \frac{(1+r)}{(1-\delta)} Q_t - \frac{1}{(1-\delta)} p_{t+1} \frac{\partial F}{\partial K_{t+1}} \qquad [307]$$

$$Q_{t+1} = \frac{1}{(1+r)} \left\{ (1-\delta) Q_{t+2} + p_{t+2} \frac{\partial F}{\partial K_{t+2}} \right\} \qquad [308]$$

$$Q_{t+2} = \frac{1}{(1+r)} \left\{ (1-\delta) Q_{t+3} + p_{t+3} \frac{\partial F}{\partial K_{t+3}} \right\} \qquad [309]$$

$$Q_t = \frac{1}{(1+r)} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(1-\delta)^s}{(1+r)^{s-1}} Q_{t+s} + \dfrac{(1-\delta)^{s-1}}{(1+r)^{s-1}} p_{t+s} \dfrac{\partial F}{\partial K_{t+s}} \\ \vdots \\ + \dfrac{(1-\delta)^2}{(1+r)^2} p_{t+3} \dfrac{\partial F}{\partial K_{t+3}} \\ + \dfrac{(1-\delta)}{(1+r)} p_{t+2} \dfrac{\partial F}{\partial K_{t+2}} \\ + p_{t+1} \dfrac{\partial F}{\partial K_{t+1}} \end{array} \right\} \qquad [310]$$

$$SH_h = s_h \, (1+r)^{\beta_{sh}} \, YD_h \qquad [311]$$

$$SM_{men} = SMO_{men} + \psi_{men} YDM_{men} \qquad [312]$$

$$PCTL_{l,men,rg} = (1-\psi_{men}) \left[1 - \left(\sum_{gvt} tytemi^{TD}_{gvt,men} + \sum_{gvt} \sum_{prr} tytemi^{TR}_{gvt,prr} \right) \right] (1 - TCHO_{l,rg}) w_{l,rg}$$

[313]

$$\ln U = \sum_i \gamma_i \ln\left(C_i - C_i^{MIN}\right) + \gamma^F \ln\left(\frac{S}{PAF}\right) \qquad [314]$$

$$\sum_i P_i \, C_i + S = YD \qquad [315]$$

$$\sum_i \gamma_i + \gamma^F = 1 \qquad [316]$$

$$\Lambda = \sum_i \gamma_i \ln\left(C_i - C_i^{MIN}\right) + \gamma^F \ln\left(\frac{S}{PAF}\right) - \lambda \left(\sum_i P_i \, C_i + S - YD \right) \qquad [317]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial C_i} = \frac{\gamma_i}{\left(C_i - C_i^{MIN}\right)} - \lambda P_i = 0 \text{, c'est-à-dire } \left(C_i - C_i^{MIN}\right) = \frac{\gamma_i}{\lambda \, P_i} \qquad [318]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial S} = \frac{\gamma^F}{\left(\frac{S}{PAF}\right)} \frac{1}{PAF} - \lambda = \frac{\gamma^F}{S} - \lambda = 0 \text{ , c'est-à-dire } \frac{\gamma^F}{S} = \lambda \qquad [319]$$

$$\left(C_i - C_i^{MIN}\right) = \frac{\gamma_i}{\lambda\, P_i} = \gamma_i \frac{S}{\gamma^F\; P_i} = S \frac{\gamma_i}{\gamma^F\; P_i} \text{ , ou } C_i = C_i^{MIN} + S \frac{\gamma_i}{\gamma^F\; P_i} \qquad [320]$$

$$\sum_i P_i\; C_i = \sum_i P_i\; C_i^{MIN} + \sum_i S \frac{\gamma_i}{\gamma^F} = \sum_i P_i\; C_i^{MIN} + \frac{1-\gamma^F}{\gamma^F} S \qquad [321]$$

$$YD = \sum_i P_i\; C_i + S = \sum_i P_i\; C_i^{MIN} + \frac{1-\gamma^F}{\gamma^F} S + S = \sum_i P_i\; C_i^{MIN} + \frac{1}{\gamma^F} S \qquad [322]$$

$$CSUP = YD - \sum_i P_i\; C_i^{MIN} = \frac{1}{\gamma^F} S \qquad [323]$$

$$C_i = C_i^{MIN} + \gamma_i \frac{CSUP}{P_i} \qquad [324]$$

$$S = \gamma^F\; CSUP \qquad [325]$$

$$CF = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{r\, S}{(1+f)^t\, PAF} = \frac{r}{f} \frac{S}{PAF} \qquad [326]$$

$$S = \left(\frac{f}{r} PAF\right) CF \qquad [327]$$

$$\ln U = \sum_i \gamma_i \ln\left(C_i - C_i^{MIN}\right) + \gamma^F \ln\left(CF - CF^{MIN}\right) \qquad [328]$$

$$\sum_i P_i\; C_i + \frac{f\, PAF}{r} CF = YD \qquad [329]$$

$$\Lambda = \sum_i \gamma_i \ln\left(C_i - C_i^{MIN}\right) + \gamma^F \ln\left(CF - CF^{MIN}\right) - \lambda\left(\sum_i P_i\; C_i + \frac{f\, PAF}{r} CF - YD\right) \qquad [330]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial C_i} = \frac{\gamma_i}{\left(C_i - C_i^{MIN}\right)} - \lambda P_i = 0 \text{ , c'est-à-dire } \left(C_i - C_i^{MIN}\right) = \frac{\gamma_i}{\lambda\, P_i} \qquad [331]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial CF} = \frac{\gamma^F}{\left(CF - CF^{MIN}\right)} - \lambda \frac{f\, PAF}{r} = 0 \text{ , c'est-à-dire } \lambda = \frac{\gamma^F}{\left(\frac{f\, PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right)} \qquad [332]$$

$$\left(C_i - C_i^{MIN}\right) = \frac{\gamma_i}{\lambda\, P_i} = \gamma_i \frac{\left(\frac{f\,PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right)}{\gamma^F\; P_i},$$

$$\text{ou } C_i = C_i^{MIN} + \gamma_i \frac{\left(\frac{f\,PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right)}{\gamma^F\; P_i} \tag{333}$$

$$\begin{aligned}\sum_i P_i\, C_i &= \sum_i P_i\, C_i^{MIN} + \left(\sum_i \gamma_i\right)\frac{\left(\frac{f\,PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right)}{\gamma^F} \\ &= \sum_i P_i\, C_i^{MIN} + \frac{1-\gamma^F}{\gamma^F}\left(\frac{f\,PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right)\end{aligned} \tag{334}$$

$$YD = \sum_i P_i\, C_i^{MIN} + \left(\frac{f\,PAF}{r}\right) CF^{MIN} + \frac{1}{\gamma^F}\left(\frac{f\,PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right) \tag{335}$$

$$YD = \left[\sum_i P_i\, C_i^{MIN} + \frac{1-\gamma^F}{\gamma^F}\left(\frac{f\,PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right)\right] + \frac{f\,PAF}{r} CF \tag{336}$$

$$\begin{aligned}YD &= \left[\sum_i P_i\, C_i^{MIN} + \frac{1-\gamma^F}{\gamma^F}\left(\frac{f\,PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right)\right] + \frac{f\,PAF}{r} CF \\ &\quad - \frac{f\,PAF}{r} CF^{MIN} + \frac{f\,PAF}{r} CF^{MIN}\end{aligned} \tag{337}$$

$$\begin{aligned}YD &= \left[\sum_i P_i\, C_i^{MIN} + \frac{1-\gamma^F}{\gamma^F}\left(\frac{f\,PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right)\right] \\ &\quad + \frac{f\,PAF}{r}\left(CF - CF^{MIN}\right) + \frac{f\,PAF}{r} CF^{MIN}\end{aligned} \tag{338}$$

$$YD = \sum_i P_i\, C_i^{MIN} + \left(\frac{f\,PAF}{r}\right) CF^{MIN} + \left[\frac{1-\gamma^F}{\gamma^F}\left(\frac{f\,PAF}{r}\right) + \left(\frac{f\,PAF}{r}\right)\right]\left(CF - CF^{MIN}\right) \tag{339}$$

$$CSUP = YD - \sum_i P_i\, C_i^{MIN} - \left(\frac{f\,PAF}{r}\right) CF^{MIN} = \frac{1}{\gamma^F}\left(\frac{f\,PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right) \tag{340}$$

$$S = \left(\frac{f\,PAF}{r}\right) CF = \left(\frac{f\,PAF}{r}\right) CF^{MIN} + \gamma^F\; CSUP \tag{341}$$

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial S}{\partial\left(f\,PAF/r\right)} \frac{\partial\left(f\,PAF/r\right)}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\, \frac{\partial S}{\partial\left(f\,PAF/r\right)} \tag{342}$$

$$\frac{\partial S}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\left[CF^{MIN} + \gamma^F \frac{\partial CSUP}{\partial\left(f\,PAF/r\right)}\right] = -\frac{1}{r^2}\left(1-\gamma^F\right)CF^{MIN} \quad [343]$$

$$\frac{\partial S}{\partial PAF} = \frac{\partial S}{\partial\left(f\,PAF/r\right)} \frac{\partial\left(f\,PAF/r\right)}{\partial PAF} = \frac{f}{r}\frac{\partial S}{\partial\left(f\,PAF/r\right)} = \frac{f}{r}\left(1-\gamma^F\right)CF^{MIN} \quad [344]$$

$$\ln U = \sum_i \gamma_i \ln\left(C_i - C_i^{MIN}\right) + \gamma^L \ln\left(L - L^{MIN}\right) + \gamma^F \ln\left(CF - CF^{MIN}\right) \quad [345]$$

$$\sum_i P_i\, C_i + w\, L + PF\, CF = y + w\, LS^{MAX} \quad [346]$$

$$\sum_i \gamma_i + \gamma^L + \gamma^F = 1 \quad [347]$$

$$S = PF\, CF = \left(\frac{f}{r} PAF\right) CF \quad [348]$$

$$\begin{aligned} \Lambda = {} & \sum_i \gamma_i \ln\left(C_i - C_i^{MIN}\right) + \gamma^L \ln\left(L - L^{MIN}\right) + \gamma^F \ln\left(CF - CF^{MIN}\right) \\ & - \lambda\left(\sum_i P_i\, C_i + w\, L + PF\, CF - y - w\, LS^{MAX}\right) \end{aligned} \quad [349]$$

$$CSUPINT = y + w\, LS^{MAX} - \sum_i P_i\, C_i^{MIN} - w\, L^{MIN} - PF\, CF^{MIN} \quad [350]$$

$$P_i\left(C_i - C_i^{MIN}\right) = \gamma_i\, CSUPINT \quad [351]$$

$$PF\left(CF - CF^{MIN}\right) = \gamma^F\, CSUPINT \quad [352]$$

$$w\left(L - L^{MIN}\right) = \gamma^L\, CSUPINT \quad [353]$$

$$LS = LS^{MAX} - L = LS^{MAX} - L^{MIN} - \gamma^L \frac{CSUPINT}{w} \quad [354]$$

$$MAXHEURES = LS^{MAX} - L^{MIN} \quad [355]$$

$$LS = LS^{MAX} - L = MAXHEURES - \gamma^L \frac{CSUPINT}{w} \quad [356]$$

$$CSUPINT = y + w\, MAXHEURES - \sum_i P_i\, C_i^{MIN} - PF\, CF^{MIN} \quad [357]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial C_i} = \frac{\gamma_i}{\left(C_i - C_i^{MIN}\right)} - \lambda P_i = 0 \text{ , c'est-à-dire } P_i\left(C_i - C_i^{MIN}\right) = \frac{\gamma_i}{\lambda} \quad [358]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial L} = \frac{\gamma^L}{\left(L - L^{MIN}\right)} - \lambda w = 0 \text{, c'est-à-dire } w\left(L - L^{MIN}\right) = \frac{\gamma^L}{\lambda} \qquad [359]$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial CF} = \frac{\gamma^F}{\left(CF - CF^{MIN}\right)} - \lambda \frac{f\ PAF}{r} = 0 \text{, c'est-à-dire } \left(\frac{f\ PAF}{r}\right)\left(CF - CF^{MIN}\right) = \frac{\gamma^F}{\lambda} \qquad [360]$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) \qquad [361]$$

$$P_i\left(C_i - C_i^{MIN}\right) = \frac{\gamma_i}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) \qquad [362]$$

$$\left(\frac{f\ PAF}{r}\right) CF = \left(\frac{f\ PAF}{r}\right) CF^{MIN} + \frac{\gamma^F}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) \qquad [363]$$

$$\sum_i P_i C_i = \sum_i P_i C_i^{MIN} + \frac{1}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) \sum_i \gamma_i = \frac{\left(1 - \gamma^L - \gamma^F\right)}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) \qquad [364]$$

$$\begin{aligned} y + w\ LS^{MAX} &= \sum_i P_i C_i^{MIN} + \frac{\left(1 - \gamma^L - \gamma^F\right)}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) + wL \\ &\quad + \left(\frac{f\ PAF}{r}\right) CF^{MIN} + \frac{\gamma^F}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) \end{aligned} \qquad [365]$$

$$\begin{aligned} & y + w\ LS^{MAX} - \sum_i P_i C_i^{MIN} - \left(\frac{f\ PAF}{r}\right) CF^{MIN} \\ & = \frac{\left(1 - \gamma^L - \gamma^F\right)}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) + wL + \frac{\gamma^F}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) \end{aligned} \qquad [366]$$

$$\begin{aligned} & y + w\ LS^{MAX} - \sum_i P_i C_i^{MIN} - \left(\frac{f\ PAF}{r}\right) CF^{MIN} - wL^{MIN} \\ & = \frac{\left(1 - \gamma^L - \gamma^F\right)}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) + w\left(L - L^{MIN}\right) + \frac{\gamma^F}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) \end{aligned} \qquad [367]$$

$$y + w\ LS^{MAX} - \sum_i P_i C_i^{MIN} - \left(\frac{f\ PAF}{r}\right) CF^{MIN} - wL^{MIN} = \frac{1}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) \qquad [368]$$

$$CSUPINT = \frac{1}{\gamma^L} w\left(L - L^{MIN}\right) \qquad [369]$$

$$\frac{g_a}{1-g_a} = \psi\left(\frac{1+i_a}{1+i_b}\right)^{\varepsilon_a} \text{, c'est-à-dire } g_a = \frac{\psi\left(\frac{1+i_a}{1+i_b}\right)^{\varepsilon_a}}{1+\psi\left(\frac{1+i_a}{1+i_b}\right)^{\varepsilon_a}} \quad [370]$$

$$U = \left[\sum_i A_i \left(z_i V_i\right)^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} \quad [371]$$

$$\text{s.c. } \sum_i V_i = W \quad [372]$$

$$z_i V_i = W \frac{A_i^{\ \sigma} z_i^{\ \sigma-1}}{\zeta} \text{, où } \zeta = \left[\sum_j A_j^{\ \sigma} z_j^{\ \sigma-1}\right] \quad [373]$$

$$M_p = \left(\frac{\sum_i w_i \left(x_i\right)^p}{\sum_i w_i}\right)^{1/p} \quad [374]$$

$$\underset{a_i}{MAX}\ VC = \sum_i \xi_i a_i \text{ , où } \xi_i = (1+r_i)q_i \quad [375]$$

$$W = A_w \left[\sum_i \delta_i a_i^{\ \beta}\right]^{\frac{1}{\beta}} \quad [376]$$

$$\tau = \frac{1}{1-\beta} \ (\beta > 1) \quad [377]$$

$$\sum_i q_i a_i = W \quad [378]$$

$$q_i a_i = W \frac{\delta_i^{\ \tau} q_i \xi_i^{\ -\tau}}{\sum_j \delta_j^{\ \tau} q_j \xi_j^{\ -\tau}} \quad [379]$$